FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

UNITÉ : ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (08 *points*)

1. $\boxed{div\left(\vec{E}\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div\left(\vec{B}\right)=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0.\vec{j}+\mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

2. $div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=0=\mu_0.div\left(\vec{j}\right)+\mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{E}\right)$ et puisque $div\left(\vec{E}\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ alors :

$\mu_0.div\left(\vec{j}\right)+\mu_0.\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{div\left(\vec{j}\right)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0}$ c.q.f.d.

3. En absence de charges ($\rho=0$) et de courants ($\vec{j}=\vec{0}$).

$\boxed{div\left(\vec{E}\right)=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div\left(\vec{B}\right)=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

4. Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=-\dfrac{\partial\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right)-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$ ($div\left(\vec{E}\right)=0$)

Et $\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E}-\mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{B}\right)\right)-\Delta\vec{B}=-\Delta\vec{B}$ ($div\left(\vec{B}\right)=0$)

Et $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{B}-\mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

5. Faisons le changement de variables suivant : $\begin{cases}u=x-c.t\\ v=x+c.t\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(v+u)\\ t=\dfrac{1}{2c}(v-u)\end{cases}$

$dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial t}dt$ or $dx=\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv=\dfrac{1}{2}\left(du+dv\right)$ et $dt=\dfrac{\partial t}{\partial u}du+\dfrac{\partial t}{\partial v}dv=\dfrac{1}{2c}\left(dv-du\right)$

En remplaçant dans l'expression de la différentielle totale, on trouve.

$$dF=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right)du+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right)dv$$

D'où $$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\right)$$

D'autre part l'équation de propagation s'écrit (F ne dépend pas de y et z)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)F=0$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial F}{\partial v}\right]=0$$

En intégrant par rapport à u. $\quad \dfrac{\partial F}{\partial v}=g_1(v)+C^{te}=g_1(v)$ (Cte = 0 ne se propage pas)

En intégrant par rapport à v. $\quad F=\int g_1(v)dv+f(u)=g(v)+f(u)$

Finalement

$$F(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$$

6.

$f(x-ct)$: Fonction d'onde plane progressive qui se propage vers les x positifs.

$g(x+ct)$: Fonction d'onde plane progressive qui se propage vers les x négatifs.

7. Phase constante $\quad \phi=x\pm ct=\text{Cte} \quad \Rightarrow \quad d\phi=dx\pm c.dt=0$.

$c=\mp\dfrac{dx}{dt}$ représente la ***vitesse de propagation de la phase ou vitesse de phase***.

EXERCICE 02 : **(12 *points*)**

1. Vecteur d'onde : λ = Constante $\Rightarrow$ $\lambda = \lambda'$ donc le module $k = k'$.

En utilisant la projection : $\vec{k}' = k'\left(-\cos\theta_r.\vec{e}_x + \sin\theta_r.\vec{e}_y\right)$ avec $\theta_i = \theta_r = \theta$.

Donc $$\boxed{\vec{k}' = k'\left(-\cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y\right)}$$

2. Onde incidente : $\vec{\mathscr{E}}_i = \vec{\mathscr{E}}_0.e^{i\left(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega.t\right)}$ avec $\begin{cases}\vec{\mathscr{E}}_0 = E_0 e^{i.\varphi_z}\vec{e}_z \\ \vec{k}\bullet\vec{r} = k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y\end{cases}$

D'où $$\boxed{\vec{\mathscr{E}}_i = E_0.e^{i\left(k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y - \omega.t + \varphi_z\right)}.\vec{e}_z}$$

3. Onde réfléchie : $\vec{\mathscr{E}}_r = \vec{\mathscr{E}}'_0.e^{i\left(\vec{k}'\bullet\vec{r} - \omega'.t\right)}$ avec $\begin{cases}\vec{\mathscr{E}}'_0 = E'_0 e^{i.\varphi'_z}\vec{e}_z \\ \vec{k}'\bullet\vec{r} = -k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y\end{cases}$ et

$\omega' = k'.c = k.c = \omega$

D'où

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}_r = E'_0.e^{i\left(-k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y - \omega.t + \varphi'_z\right)}.\vec{e}_z}$$

4. Continuité au point O :

$\vec{\mathscr{E}}_i\left(x=0, y=0\right) = E_0.e^{-i.\omega t}.e^{i.\varphi_z}.\vec{e}_z$ et $\vec{\mathscr{E}}_r\left(x=0, y=0\right) = E_0.e^{-i.\omega t}.e^{i.\varphi_z}.\vec{e}_z$.

$\vec{\mathscr{E}}_i\left(x=0, y=0\right) + \vec{\mathscr{E}}_r\left(x=0, y=0\right) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{\mathscr{E}}_i\left(x=0, y=0\right) = -\vec{\mathscr{E}}_r\left(x=0, y=0\right)$

Donc $E_0.e^{i.\varphi_z} = -E'_0.e^{i.\varphi'_z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases}E_0 = -E'_0 \\ \varphi_z = \varphi'_z\end{cases}}$ (on prend $\varphi_z = \varphi'_z = 0$)

5. Champ résultant : $\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_i + \vec{\mathscr{E}}_r = E_0.\left[e^{i\left(k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y - \omega.t\right)} - e^{i\left(-k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y - \omega.t\right)}\right]\vec{e}_z$

$$\vec{\mathscr{E}}\left(x,y,t\right) = E_0.e^{i\left(k.\sin\theta.y - \omega.t\right)}\left[e^{i.k.\cos\theta.x} - e^{-i.k.\cos\theta.x}\right]\vec{e}_z$$

Donc

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}\left(x,y,t\right) = 2i.E_0.\sin\left(k.\cos\theta.x\right).e^{i\left(k.\sin\theta.y - \omega.t\right)}.\vec{e}_z}$$

En notation réelle

$$\vec{E}\left(x,y,t\right) = 2E_0.\sin\left(k.\cos\theta.x\right).\cos\left(k.\sin\theta.y - \omega.t + \frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z$$

Ou

$$\boxed{\vec{E}\left(x,y,t\right) = -2E_0.\sin\left(k.\cos\theta.x\right).\sin\left(k.\sin\theta.y - \omega.t\right).\vec{e}_z}$$

6. Champs magnétiques : $\vec{n}\times\vec{E} = c.\vec{B}$ en multipliant par k on a $\vec{k}\times\vec{E} = \omega.\vec{B}$.

En notation complexe : $\vec{k}\times\vec{\mathscr{E}}_i = \omega.\vec{\mathscr{B}}_i$ et $\vec{k}'\times\vec{\mathscr{E}}_r = \omega.\vec{\mathscr{B}}_r$.

D'où

$$\vec{\mathscr{B}}_i = \frac{\vec{k}\times\vec{\mathscr{E}}_i}{\omega} = \frac{k.E_0}{\omega}.e^{i\left(k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y - \omega.t\right)}.\left(\cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y\right)\times\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{\mathscr{B}}_i = \frac{E_0}{c}.e^{i\left(k.\cos\theta.x + k.\sin\theta.y - \omega.t\right)}.\left(\sin\theta.\vec{e}_x - \cos\theta.\vec{e}_y\right)}$$

Et

$$\overrightarrow{\mathscr{B}}_r = \frac{\vec{k}' \times \vec{\mathscr{E}}_r}{\omega} = -\frac{k.E_0}{\omega}.e^{i(-k.\cos\theta.x+k.\sin\theta.y-\omega.t)}.\left(-\cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y\right)\times\vec{e}_z$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{B}}_r = -\frac{E_0}{c}.e^{i(-k.\cos\theta.x+k.\sin\theta.y-\omega.t)}.\left(\sin\theta.\vec{e}_x + \cos\theta.\vec{e}_y\right)}$$

7. Champ magnétique résultant :

$$\overrightarrow{\mathscr{B}} = \overrightarrow{\mathscr{B}}_i + \overrightarrow{\mathscr{B}}_r = \frac{E_0}{c}.e^{i(k.\sin\theta.y-\omega.t)}.\left[\sin\theta\left(e^{ik.\cos\theta.x} - e^{-ik.\cos\theta.x}\right)\vec{e}_x - \cos\theta\left(e^{ik.\cos\theta.x} + e^{-ik.\cos\theta.x}\right)\vec{e}_y\right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{B}}(x,y,t) = \frac{2E_0}{c}.e^{i(k.\sin\theta.y-\omega.t)}.\left[i.\sin\theta.\sin(k.\cos\theta.x)\vec{e}_x - \cos\theta.\cos(k.\cos\theta.x)\vec{e}_y\right]}$$

En notation réelle

$$\vec{B}(x,y,t) = \frac{2E_0}{c}\left[-\sin\theta.\sin(k.\cos\theta.x).\sin(k.\sin\theta.y-\omega.t)\vec{e}_x - \cos\theta.\cos(k.\cos\theta.x).\cos(k.\sin\theta.y-\omega.t)\vec{e}_y\right]$$

$$\boxed{\vec{B}(x,y,t) = -\frac{2E_0}{c}\left[\sin\theta.\sin(k.\cos\theta.x).\sin(k.\sin\theta.y-\omega.t)\vec{e}_x + \cos\theta.\cos(k.\cos\theta.x).\cos(k.\sin\theta.y-\omega.t)\vec{e}_y\right]}$$

8. Structure de l'onde :

Onde stationnaire suivant l'axe (OX).
Onde progressive suivant l'axe (OY) vers les y croissants (positifs).

9. Vecteur de Poynting : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ (on utilise la notation réelle).

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & -2E_0.\sin(k.\cos\theta.x).\sin(k.\sin\theta.y-\omega.t) \\ -\frac{2E_0}{c}\sin\theta.\sin(k.\cos\theta.x).\sin(k.\sin\theta.y-\omega.t) & -\frac{2E_0}{c}\cos\theta.\cos(k.\cos\theta.x).\cos(k.\sin\theta.y-\omega.t) & 0 \end{vmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0.c}\begin{pmatrix} -\cos\theta.\sin(2k.\cos\theta.x).\sin 2(k.\sin\theta.y-\omega.t) \\ 4.\sin\theta.\sin^2(k.\cos\theta.x).\sin^2(k.\sin\theta.y-\omega.t) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Valeurs moyennes sur une période : $\left\langle \sin 2(k.\sin\theta.y-\omega.t)\right\rangle = 0$ et $\left\langle \sin^2(k.\sin\theta.y-\omega.t)\right\rangle = \dfrac{1}{2}$.

D'où

$$\boxed{\left\langle\vec{P}\right\rangle = \frac{2.E_0^2}{\mu_0.c}\sin\theta.\sin^2(k.\cos\theta.x)\vec{e}_y}$$