FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

UNITÉ : ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (08 *points*)

1. Champ crée par un courant droit infini :

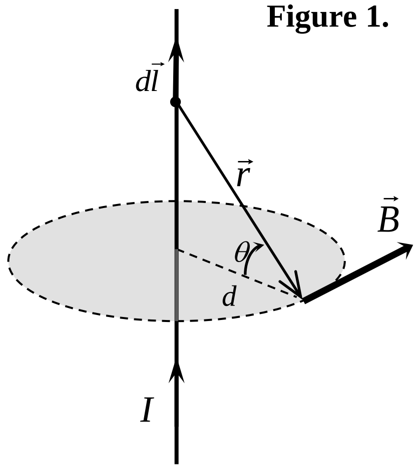

Figure 1.

Utilison la relation $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \dfrac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon d.(Figure 1)

Et $\left| d\vec{l} \times \vec{r} \right| = dl.r.\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = dl.r$

Paramétrisation $\begin{cases} dl = \dfrac{d}{\cos^2\theta} d\theta \\ r = \dfrac{d}{\cos\theta} \end{cases}$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale $B = \dfrac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \dfrac{dl}{r^2} = \dfrac{\mu_0 . I}{4\pi . d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta . d\theta$

Enfin $\boxed{B = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I}{d}}$

En coordonnées cylindriques $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I}{d} \vec{e}_\varphi}$

2. Champ crée par la spire triangulaire :

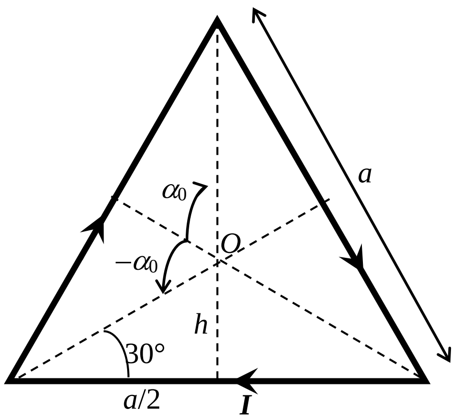

Figure 2.

Calculons la distance h entre le milieu des segments et le point O.

$$tg(30) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{a/2} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Pour calculer le champ crée par un segment de droite on fait le même paramétrage que dans la question précédente.

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . d} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos\theta . d\theta$$

L'angle α_0 est dans le cas d'un triangle donné par $\alpha_0 = \pi/3$ (figure 2.).

D'où

$$B = \frac{\mu_0 . I}{2\pi . d} \sin\alpha_0 \qquad \text{avec} \qquad d = h = \frac{a}{2\sqrt{3}} .$$

Finalement, le champ crée par tout le triangle :

$$\boxed{B_{Tot} = 3.B = \frac{9\mu_0 . I}{2\pi . a}}$$

$\vec{B}_{Tot}$ est perpendiculaire à la surface du triangle. Son sens est donné par la Règle de la Main Droite appliquée au sens du courant.

3. Dans le cas d'un polygone régulier de N cotés. $\begin{cases} \alpha_0 = \pi/N \\ d = R \end{cases}$

Le champ magnétique crée par un seul ségment.

$$B = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_L \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0.I}{4\pi.d}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\cos\theta.d\theta = \frac{\mu_0.I}{2\pi.d}\sin\alpha_0$$

Le champ magnétique total.

$$\boxed{B_{Tot} = N.B = \frac{\mu_0.I}{2d}\left(\frac{N}{\pi}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

$\vec{B}_{Tot}$ est perpendiculaire à la surface du polygone. Son sens est donné par la Règle de la Main Droite appliquée au sens du courant.

4. Dans le cas où $N \to\infty$.

$$\lim_{lN\to\infty} B_{Tot} = \lim_{lN\to\infty}\left\{\frac{\mu_0.I}{2R}\left(\frac{N}{\pi}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right\} = \lim_{lx\to 0}\left\{\frac{\mu_0.I}{2R}\frac{\sin x}{x}\right\}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{lN\to\infty} B_{Tot} = \frac{\mu_0.I}{2R}}$$

C'est le champ magnétique crée par une spire circulaire dans son centre.

<u>EXERCICE 02 :</u> (08 *points*)

$$\vec{E} = E_0\cos(\alpha)\cos(ky-\omega t).\vec{e}_x - E_0\sin(\alpha)\sin(ky-\omega t).\vec{e}_z$$

1. Direction de propagation : axe OY dans sens positif $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{n} = \vec{e}_y}$.

2. $\vec{E} = E_0\cos(\alpha)\cos(ky-\omega t).\vec{e}_x + E_0\sin(\alpha)\cos(ky-\omega t+\pi/2).\vec{e}_z$.

$\varphi = \varphi_x - \varphi_z = -\pi/2$ avec $E_{0x} = E_0\cos(\alpha)$ et $E_{0z} = E_0\sin(\alpha)$.

- Si $\cos\alpha = \sin\alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha = \pi/4 + n\pi$ $\Rightarrow$ polarisation circulaire droite.
- Si $\cos\alpha = -\sin\alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha = 3\pi/4 + n\pi$ $\Rightarrow$ polarisation circulaire gauche.
- Si $\cos\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = \pi/2 + n\pi$ $\Rightarrow$ polarisation rectiligne suivant $\vec{e}_z$.
- Si $\sin\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = n\pi$ $\Rightarrow$ polarisation rectiligne suivant $\vec{e}_x$.
- Pour le reste $\Rightarrow$ polarisation elliptique.

3. Notation complexe.

$$\vec{\mathscr{E}}(y,t) = E_0.e^{i(k.y-\omega.t)}\left(\cos\alpha.\vec{e}_x + e^{i\pi/2}\sin\alpha.\vec{e}_z\right)$$

Ou

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}(y,t) = E_0.e^{i(k.y-\omega.t)}\left(\cos\alpha.\vec{e}_x + i\sin\alpha.\vec{e}_z\right)}$$

4. Champ magnétique :

Onde plane suivant $\vec{e}_y$ $\Rightarrow$ $\vec{e}_y \times \vec{E} = c.\vec{B}$.

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\alpha)\cos(ky-\omega t).(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + \frac{E_0}{c}\sin(\alpha)\cos(ky-\omega t+\pi/2).(\vec{e}_y \times \vec{e}_z)$$

D'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c}\{\sin(\alpha)\cos(ky-\omega t+\pi/2).\vec{e}_x - \cos(\alpha)\cos(ky-\omega t).\vec{e}_z\}}$$

En notation complexe.

$$\overrightarrow{\mathscr{B}}(y,t) = \frac{E_0}{c}.e^{i(k.y-\omega.t)}\left(e^{i\pi/2}\sin\alpha.\vec{e}_x - \cos\alpha.\vec{e}_z\right)$$

Ou

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{B}}(y,t) = \frac{E_0}{c}.e^{i(k.y-\omega.t)}\left(i.\sin\alpha.\vec{e}_x - \cos\alpha.\vec{e}_z\right)}$$

5. Vecteur de Poynting.

$\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E^2}{\mu_0 c}\vec{e}_y$ onde plane.

$$\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\{\cos^2(\alpha)\cos^2(ky-\omega t) + \sin^2(\alpha)\cos^2(ky-\omega t+\pi/2)\}.\vec{e}_y$$

Comme

$$\langle\cos^2(ky-\omega t)\rangle = \langle\cos^2(ky-\omega t+\pi/2)\rangle = 1/2$$

Alors

$$\boxed{\langle\vec{P}\rangle = \frac{E_0^2}{2.\mu_0 c}\{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\}.\vec{e}_y = \frac{E_0^2}{2.\mu_0 c}\vec{e}_y}$$

6. La puissance moyenne est donnée par :

$$\langle\mathscr{P}\rangle = \langle\vec{P}\rangle \bullet \vec{S} = \langle P\rangle.S = \frac{E_0^2}{2.\mu_0 c}\pi r^2$$

Donc

$$\langle\mathscr{P}\rangle = \frac{E_0^2}{8.\mu_0 c}\pi d^2$$

Et

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{8.\mu_0 c}{\pi d^2}\langle\mathscr{P}\rangle}} \qquad \text{A.N.} \qquad \boxed{E_0 = 3{,}1\times10^3 \quad \text{V/m}}.$$

<u>QUESTIONS DE COURS :</u> (04 *points*)

1. $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

2. $\boxed{div(\vec{A}) + \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$ avec $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ et $V(\infty) = 0$

3. $div(\vec{E}) = div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial div(\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A}) = -\mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ donc $\boxed{\Delta V - \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$ or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A}) = -\mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$

Donc $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = -\mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 . \varepsilon_0 . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

D'où $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} - \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 . \vec{j} = \vec{0}}$

4. ($\rho = 0$) et ($\vec{j} = \vec{0}$) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V - \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$ et $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0 . \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

5. $\boxed{\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2}$ et $\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}$