

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (07 points)

$$1. \quad \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})}$$

$$2. \quad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \quad \text{donc} \quad V = V' + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A} = \vec{A}' - \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(V' + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' - \overrightarrow{\text{grad}}(f)\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V') - \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad}}(f) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Alors

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}}$$

$$\text{Et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}' - \overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}') - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}')}$$

$$3. \quad \text{Jauge de LORENTZ} \quad \boxed{\text{div}(\vec{A}) + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad \text{avec} \quad \vec{A}(\infty) = \vec{0} \quad \text{et} \quad V(\infty) = 0$$

$$4. \quad \text{div}(\vec{E}) = \text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial \text{div}(\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Or, d'après la jauge de LORENTZ} \quad \text{div}(\vec{A}) = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta V - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A} \quad \text{or, d'après la jauge de LORENTZ} \quad \text{div}(\vec{A}) = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\text{Donc} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad}}(V) - \Delta \vec{A}$$

$$\text{D'autre part} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{D'où} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad}}(V) - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\text{En comparant ces deux équations, il vient que} \quad \boxed{\Delta \vec{A} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \vec{j} = \vec{0}}$$

$$5. \quad (\rho = 0) \text{ et } (\vec{j} = \vec{0}) \Rightarrow \boxed{\Delta V - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta \vec{A} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

EXERCICE 02 : (13 points)

$$\vec{E}_1 = E_0 \cdot \cos(k.x - \omega.t) \vec{e}_y - E_0 \cdot \sin(k.x - \omega.t) \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1 = E_0 \cdot \cos(k.x - \omega.t) \vec{e}_y + E_0 \cdot \cos\left(k.x - \omega.t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z$$

1. Notation complexe : $\vec{\mathcal{E}}_1 = E_0 \cdot e^{i(k.x - \omega.t)} (\vec{e}_y + e^{i\pi/2} \vec{e}_z)$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = E_0 \cdot e^{i(k.x - \omega.t)} (\vec{e}_y + i \vec{e}_z)$$

2. Polarisation : $\varphi = \varphi_z - \varphi_y = \frac{\pi}{2}$ et $E_{0z} = E_{0y} = E_0$ polarisation circulaire gauche.

3. Champ magnétique : Direction de propagation $\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}_1}{c}$

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(k.x - \omega.t) \vec{e}_z - \frac{E_0}{c} \cdot \cos\left(k.x - \omega.t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} \cdot \sin(k.x - \omega.t) \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} \cdot \cos(k.x - \omega.t) \vec{e}_z$$

En notation complexe :

$$\vec{\mathcal{B}}_1 = \frac{E_0}{c} \cdot e^{i(k.x - \omega.t)} (\vec{e}_z - i \vec{e}_y)$$

4. Potentiel vecteur : $\vec{B}_1 = \text{rot}(\vec{A}_1)$ en notation complexe $\vec{\mathcal{B}}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}_1 = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}_1$

Posons $\vec{\mathcal{A}}_1 = (A_{0x} \cdot e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + A_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} \vec{e}_y + A_{0z} \cdot e^{i\varphi_z} \vec{e}_z) e^{i(k.x - \omega.t)} = (A_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} \vec{e}_y + A_{0z} \cdot e^{i\varphi_z} \vec{e}_z) e^{i(k.x - \omega.t)}$ transversale.

Donc $\vec{\mathcal{B}}_1 = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}_1 = ik \cdot \vec{e}_x \times (A_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} \vec{e}_y + A_{0z} \cdot e^{i\varphi_z} \vec{e}_z) e^{i(k.x - \omega.t)}$ avec $\vec{k} = ik \cdot \vec{e}_x$

D'où $\frac{E_0}{k \cdot c} \cdot e^{i(k.x - \omega.t)} (\vec{e}_z - i \vec{e}_y) = i \cdot (A_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} \vec{e}_z - A_{0z} \cdot e^{i\varphi_z} \vec{e}_y) e^{i(k.x - \omega.t)}$

En comparant : $\begin{cases} i \cdot A_{0y} \cdot e^{i\varphi_y} = E_0 / k \cdot c \\ A_{0z} \cdot e^{i\varphi_z} = E_0 / k \cdot c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{0y} = E_0 / k \cdot c \\ A_{0z} = E_0 / k \cdot c \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi_y = -\pi/2 \\ \varphi_z = 0 \end{cases}$

En remplaçant dans $\vec{\mathcal{A}}_1$ et en posant $k \cdot c = \omega$ on trouve :

$$\vec{\mathcal{A}}_1 = \frac{E_0}{\omega} \cdot e^{i(k.x - \omega.t)} (\vec{e}_z - i \vec{e}_y)$$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{A}_1 = \frac{E_0}{\omega} \cdot \sin(k.x - \omega.t) \vec{e}_y + \frac{E_0}{\omega} \cdot \cos(k.x - \omega.t) \vec{e}_z$$

5. $\vec{P}_1 = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_1}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P} = \frac{E_1^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{e}_x$ ($B_1 = \frac{E_1}{c}$)

Donc $\vec{P}_1 = \frac{E_0^2 \cdot [\cos^2(k.x - \omega.t) + \sin^2(k.x - \omega.t)]}{\mu_0 \cdot c} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{e}_x$ constant.

6. $\vec{E}_1(x=0) + \vec{E}_2(x=0) = \vec{0}$ et $\vec{E}_2(x,t)$ est une OEPPM qui se propage vers les x négatifs.

Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x,t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y} \cdot \cos(k \cdot x + \omega t + \varphi_y) \vec{e}_y + E_{0z} \cdot \cos(k \cdot x + \omega t + \varphi_z) \vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0 \cdot \cos(-\omega t) \vec{e}_y - E_0 \cdot \cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z = E_{0y} \cdot \cos(+\omega t + \varphi_y) \vec{e}_y + E_{0z} \cdot \cos(+\omega t + \varphi_z) \vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) = -E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_{0z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_z) = -E_0 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = -\pi/2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\vec{E}_2 = -E_0 \cdot \cos(k \cdot x + \omega t) \vec{e}_y - E_0 \cdot \cos\left(k \cdot x + \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z$$

Et en notation complexe :

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = E_0 \cdot e^{i(k \cdot x + \omega t)} (\vec{e}_y - i \vec{e}_z)$$

7. Polarisation : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \varphi = \varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}$ et $E_{0z} = E_{0y} = E_0$
polarisation circulaire gauche.

8. Champ magnétique : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{-\vec{e}_x \times \vec{E}_2}{c}$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(k \cdot x + \omega t) \vec{e}_z - \frac{E_0}{c} \cdot \cos\left(k \cdot x + \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \cdot \sin(k \cdot x + \omega t) \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} \cdot \cos(k \cdot x + \omega t) \vec{e}_z$$

En notation complexe :

$$\vec{\mathcal{B}}_2 = \frac{E_0}{c} \cdot e^{i(k \cdot x + \omega t)} (\vec{e}_z + i \vec{e}_y)$$

9. $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2 = E_0 \cdot e^{ik \cdot x} [(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \vec{e}_y + i(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \vec{e}_z]$
 $\vec{\mathcal{E}} = 2i \cdot E_0 \cdot e^{ik \cdot x} [-\sin(\omega t) \vec{e}_y + \cos(\omega t) \vec{e}_z]$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{E} = -2E_0 \cdot \sin(k \cdot x) [-\sin(\omega t) \vec{e}_y + \cos(\omega t) \vec{e}_z]$$

$$\vec{E} = 2E_0 \cdot [\sin(k \cdot x) \sin(\omega t) \vec{e}_y - \sin(k \cdot x) \cos(\omega t) \vec{e}_z]$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_1 + \vec{\mathcal{B}}_2 = \frac{E_0}{c} \cdot e^{ik \cdot x} [(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \vec{e}_z + i(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \vec{e}_y]$$

$$\vec{\mathcal{B}} = 2 \frac{E_0}{c} \cdot e^{ik \cdot x} [\cos(\omega t) \vec{e}_z - \sin(\omega t) \vec{e}_y]$$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cdot [-\cos(k \cdot x) \sin(\omega t) \vec{e}_y + \cos(k \cdot x) \cos(\omega t) \vec{e}_z]$$

10. Vecteur de Poynting : $\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{4E_0^2}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \sin(k.x).\sin(\omega.t) & -\sin(k.x).\cos(\omega.t) \\ 0 & -\cos(k.x).\sin(\omega.t) & \cos(k.x).\cos(\omega.t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \vec{0}}$$

11. Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.