FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (10 *points*)

1. Forme Intégrale du théorème d'Ampère : $\boxed{\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}}$.

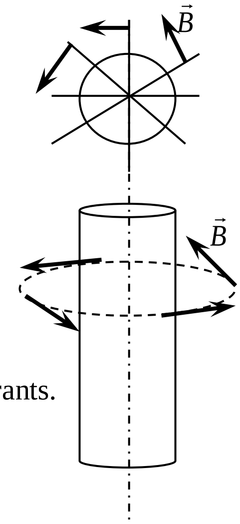
   Forme locale du théorème d'Ampère : $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j}}$.

2. $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} \quad \Rightarrow \quad div(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \mu_0.div(\vec{j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad div(\vec{j}) = 0$

   Or d'après l'équation de continuité $div(\vec{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

   En régime stationnaire $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad div(\vec{j}) = 0$.

   D'où le théorème d'AMPERE n'est valable qu'en régime permanent.



3. Cylindre traversé par une densité volumique de courant $\vec{j}$.

   Symétrie du champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de symétrie des courants.
   Tout plan passant par l'axe du cylindre est un plan de symétrie.
   D'où la symétrie de $\vec{B}$ est une symétrie cylindrique : $\boxed{\vec{B} = B.\vec{e}_\varphi}$.

   Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit une boucle fermée en forme de cercle de rayon r centrée sur l'axe du cylindre et contenue dans plan perpendiculaire au cylindre.
   $\vec{B} // d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \bullet d\vec{r} = B.dr$ et $B = C^{te}$ sur le cercle (par symétrie de rotation).

   Donc le théorème d'Ampère devient dans ce cas :
   $$\oint \vec{B} \bullet d\vec{r} = B.2\pi.r = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

   Calculons les courants intérieurs à la boucle.

   <u>Zone 1 : Intérieur du cylindre $0 \le r \le R$.</u>

   $\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{S} = j.S = j.\pi.r^2$ (j est constant et perpendiculaire à la section du cylindre).

   Donc $\boxed{B_{\text{int}} = \dfrac{\mu_0 j}{2} r}$ et $\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \dfrac{\mu_0 j}{2} r.\vec{e}_\varphi}$.

   <u>Zone 2 : Extérieur du cylindre $R \le r < +\infty$.</u>

   $\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{S} = j.S = j.\pi.R^2$ (j est constant et perpendiculaire à la section du cylindre).

   Donc $\boxed{B_{ext} = \dfrac{\mu_0 j.R^2}{2} \dfrac{1}{r}}$ et $\boxed{\vec{B}_{ext} = \dfrac{\mu_0 j.R^2}{2} \dfrac{1}{r}.\vec{e}_\varphi}$.

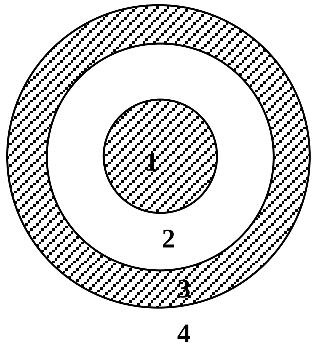
4. La symétrie cylindrique étant la même que dans la question 3. ($\vec{B}$ perpendiculaire au plan de symétrie qui passe par l'axe du cylindre), donc :

$$\boxed{\vec{B} = B.\vec{e}_\varphi}$$

5. Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit une boucle fermée en forme de cercle de rayon r centrée sur l'axe du cylindre et contenue dans plan perpendiculaire au cylindre.

Et le théorème d'Ampère devient : $\oint \vec{B} \bullet d\vec{r} = B.2\pi.r = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$

Calculons les courants intérieurs à la boucle.



<u>Zone 1 :</u> $0 \le r \le R_1$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S = j.\pi.r^2$ (j est constant et perpendiculaire à la section du cylindre).

Donc $\boxed{B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r}$ et $\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r.\vec{e}_\varphi}$.

<u>Zone 2 :</u> $R_1 \le r \le R_2$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S_1 = j.\pi.R_1^2$

Donc $\boxed{B_2 = \frac{\mu_0 j.R_1^2}{2} \frac{1}{r}}$ et $\boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j.R_1^2}{2} \frac{1}{r}.\vec{e}_\varphi}$.

<u>Zone 3 :</u> $R_2 \le r \le R_3$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S_1 + j_2 S = j.\pi.R_1^2 - j\left(\pi.r^2 - \pi.R_2^2\right)$

Donc $\boxed{B_3 = \frac{\mu_0 j}{2}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{r} - r\right)}$ et $\boxed{\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 j}{2}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{r} - r\right).\vec{e}_\varphi}$.

<u>Zone 4 :</u> $R_3 \le r < +\infty$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S_1 + j_2 S_2 = j.\pi.R_1^2 - j\left(\pi.R_3^2 - \pi.R_2^2\right)$

Donc $\boxed{B_4 = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}{r}}$ et $\boxed{\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}{r} \vec{e}_\varphi}$.

EXERCICE 02 : (10 *points*)

1. Champ électrique :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0.e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)}.\vec{e}_z$$

Vecteur d'onde dans le plan (XOY) faisant un angle θ avec l'axe (OX).

$$\vec{k} = k_x.\vec{e}_x + k_y.\vec{e}_y = k.\cos\theta\,.\vec{e}_x + k.\sin\theta\,.\vec{e}_y$$

D'où

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = E_0.\exp[i(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)]\,.\vec{e}_z}$$

En notation réelle

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = E_0.\cos(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)\,.\vec{e}_z}$$

2. Champ magnétique :

$$\vec{k} = k.\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} = \cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y$$

Relation de structure de l'OEPPM.

$$\vec{n}\times\vec{E} = c.\vec{B}$$

Donc

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c}.\exp[i(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)]\,.\left(\cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y\right)\times\vec{e}_z$$

Et

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c}.\exp[i(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)]\,.\left(\sin\theta\,.\vec{e}_x - \cos\theta\,.\vec{e}_y\right)}$$

En notation réelle

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{E_0}{c}.\cos(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)\,.\left(\sin\theta\,.\vec{e}_x - \cos\theta\,.\vec{e}_y\right)}$$

3. En notation complexe et dans le cas d'une OEPPM quelconque

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0x}.e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)}.\vec{e}_x + E_{0y}.e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)}.\vec{e}_y + E_{0z}.e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)}.\vec{e}_z$$

Avec

$$\vec{k} = k_x.\vec{e}_x + k_y.\vec{e}_y + k_z.\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\bullet\vec{r} = k_x.x + k_y.y + k_z.z$$

L'opération dérivée partielle par rapport à x ; y ; z s'écrit

$$\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial x} = ik_x.\vec{E}(\vec{r},t) \quad ; \quad \frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial y} = ik_y.\vec{E}(\vec{r},t) \quad ; \quad \frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial y} = ik_z.\vec{E}(\vec{r},t)$$

D'où l'opérateur NABLA

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z = i\left(k_x.\vec{e}_x + k_y.\vec{e}_y + k_z.\vec{e}_z\right) = i\vec{k}}$$

L'opération dérivée partielle par rapport à t s'écrit

$$\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \pm i\omega.\vec{E}(\vec{r},t)$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv \pm i.\omega}$$

4. Equations de Maxwell :

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla}\bullet\vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad div(\vec{B}) = \vec{\nabla}\bullet\vec{B} = 0$$

En remplaçant $\vec{\nabla}$ par $i\vec{k}$.

$$i\vec{k}\bullet\vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad i\vec{k}\bullet\vec{B} = 0$$

Donc

$$\boxed{\vec{k} \perp \vec{E}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{k} \perp \vec{B}}$$

Alors : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation.

5. Vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Cette opération n'est pas linéaire, on utilise donc la notation réelle.

$$\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)\,.\vec{e}_z \times \left(\sin\theta\,.\vec{e}_x - \cos\theta\,.\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)\,.\left(\cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y\right)$$

Donc

$$\boxed{\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)\,.\vec{n}}$$

Et sa valeur moyenne sur une période

$$\langle\vec{P}\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\langle\cos^2(k.\cos\theta\,.x + k.\sin\theta\,.y - \omega t)\rangle.\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle\vec{P}\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{n}}$$

6. Théorème de Poynting

$$\oiint \vec{P}\bullet d\vec{S} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -\mathcal{P}_S$$

La puissance moyenne traversant une surface S.

$$\langle\mathcal{P}_S\rangle = \iint_S \langle\vec{P}\rangle\bullet d\vec{S} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = dS.\vec{e}_x$$

Car l'intégrale sur t est indépendante de l'intégrale sur y et z. Donc :

$$\langle\mathcal{P}_S\rangle = \langle\vec{P}\rangle\bullet\vec{e}_x.S = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\vec{n}\bullet\vec{e}_x.S \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle\mathcal{P}_S\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos\theta\,.S}$$

7. Application numérique :

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2\langle\mathcal{P}_S\rangle.\mu_0 c}{\cos\theta\,.S}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = 6{,}6\ Volt.m^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_0 = 2{,}2 \times 10^{-8}\ Tesla}$$