CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (10 *points*)

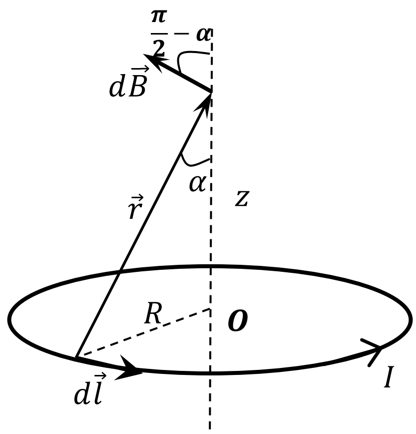
1. Loi de Biot et Savart pour une distribution volumique de courants.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}d\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}}{r}d\tau}$$

2. Loi de Biot et Savart pour des courants filiformes stationnaires.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}}{r}}$$

3. Champ magnétique crée par une spire circulaire.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Et

$$dB = \frac{\mu_0 . I}{4\pi}\frac{dl.r}{r^3} \quad \text{car} \quad d\vec{l}\perp\vec{r}$$

En utilisant la symétrie on trouve que $\vec{B} \parallel OZ$
Donc on ne calculera que l'intégrale de la composante sur OZ.
$dB_z = dB.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = dB.\sin\alpha$
Paramétrage :

$$dl = R.d\theta \quad ; \quad r = \sqrt{R^2+z^2} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

D'où

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

Et enfin

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{I.R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

4. Champ magnétique au centre de la spire.

$$\boxed{B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

5. Champ crée par la spire carré.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi}\oint_L \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon R.

$$d\vec{l}\times\vec{r} = dl.r.\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = dl.r.\cos(\theta)$$

Paramétrage : (paramètre $-\pi/4 \leq \theta \leq +\pi/4$)

$$dl = \frac{R}{\cos^2\theta} d\theta \qquad \text{et} \qquad r = \frac{R}{\cos\theta}$$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . R} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta . d\theta \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\sqrt{2}. \mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}$$

Avec $R = a/2$ la distance entre le milieu des segments et le point O.
Finalement, le champ crée par tout le carré.

$$\boxed{B_{\text{tot}} = 4B = \frac{2\sqrt{2}. \mu_0}{\pi} \frac{I}{a}}$$

6. Dans le cas d'un polygone régulier de N cotés.

$$-\pi/N \leq \theta \leq +\pi/N$$

Le champ magnétique crée par un seul ségment.

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . R} \int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \cos\theta . d\theta \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

Et le champ magnétique total.

$$\boxed{B_{\text{tot}} = NB = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{N}{\pi}\right). \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

$\vec{B}_{\text{tot}}$ est perpendiculaire à la surface du polygone. Son sens est donné par la Règle de la Main Droite appliquée au sens du courant.

7. Dans le cas où $N \rightarrow \infty$.

$$\lim_{N \to +\infty} (B_{\text{tot}}) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{N}{\pi}\right). \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\sin(x)}{x} \right)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} (B_{\text{tot}}) = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

C'est le champ magnétique crée par une spire circulaire en son centre.

EXERCICE 02 : (**10 *points***)

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(kx-\omega t).\vec{e}_y + E_0.\sin(kx-\omega t).\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(kx-\omega t).\vec{e}_y + E_0.\cos\left(kx-\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z$$

1. **Notation complexe.**

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_1 = E_0.e^{i(kx-\omega t)}\left(\vec{e}_y + e^{-i\pi/2}.\vec{e}_z\right) = E_0.e^{i(kx-\omega t)}\left(\vec{e}_y - i.\vec{e}_z\right)}$$

2. **Polarisation de l'onde.** (direction de propagation $\vec{e}_x$)

$\varphi = \varphi_z - \varphi_y = -\pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z} = E_0$: polarisation circulaire droite.

3. **Champ magnétique :** Direction de propagation $\vec{e}_x \Rightarrow c\vec{B}_1 = \vec{e}_x \times \vec{E}_1$

$$\underline{\vec{B}}_1 = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}.\vec{e}_x \times \left(\vec{e}_y - i.\vec{e}_z\right)$$

Notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_1 = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}\left(i.\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)}$$

Notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}\cos\left(kx-\omega t+\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}\cos(kx-\omega t).\vec{e}_z}$$

4. **potentiel vecteur.**

$$\vec{B}_1 = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}_1\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{B}}_1 = i\vec{k} \times \underline{\vec{A}}_1$$

$$\vec{k} = k.\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{A}}_1 = \underline{A}_{1y}.\vec{e}_y + \underline{A}_{1z}.\vec{e}_z \text{ (transversal).}$$

D'où

$$\underline{\vec{B}}_1 = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}\left(i.\vec{e}_y + \vec{e}_z\right) = ik\left(\underline{A}_{1y}.\vec{e}_x \times \vec{e}_y + \underline{A}_{1z}.\vec{e}_x \times \vec{e}_z\right) = ik\left(\underline{A}_{1y}.\vec{e}_z - \underline{A}_{1z}.\vec{e}_y\right)$$

En comparant

$$ik.\underline{A}_{1y} = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{et} \quad ik.\underline{A}_{1z} = -i\frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}$$

Et le potentiel vecteur

$$\boxed{\underline{\vec{A}}_1 = -\frac{E_0}{kc}e^{i(kx-\omega t)}\left(i.\vec{e}_y + \vec{e}_z\right) = -\frac{E_0}{\omega}e^{i(kx-\omega t)}\left(i.\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)}$$

5. **Vecteur de Poynting.**

$\vec{P}_1 = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_1}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P}_1 = \frac{E_1^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x$ $\left(B_1 = \frac{E_1}{c}\right)$. Donc :

$$\boxed{\vec{P}_1 = \frac{E_0^2.\left(\cos^2(kx-\omega t) + \sin^2(kx-\omega t)\right)}{\mu_0.c}\vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x = \text{Constante}}$$

6. $\vec{E}_1(x=0) + \vec{E}_2(x=0) = \vec{0}$ et $\vec{E}_2(x,t)$ est une OEPPM qui se propage vers les x négatifs. Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x,t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y}.\cos\left(kx+\omega t+\varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(kx+\omega t+\varphi_z).\vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0.\cos(-\omega t).\vec{e}_y - E_0.\cos\left(-\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z = E_{0y}.\cos\left(\omega t+\varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(\omega t+\varphi_z).\vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y}.\cos(\omega t+\varphi_y) = -E_0.\cos(\omega t) \\ E_{0z}.\cos(\omega t+\varphi_z) = -E_0.\cos(\omega t+\pi/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = +\pi/2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -E_0.\cos(kx+\omega t)\,.\,\vec{e}_y - E_0.\cos(kx+\omega t+\pi/2)\,.\,\vec{e}_z}$$

Et en notation complexe :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_2 = -E_0.e^{i(kx+\omega t)}(\vec{e}_y + i.\vec{e}_z)}$$

7. **Polarisation :** Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \varphi_y - \varphi_z = -\pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z}$
   polarisation circulaire droite.

8. **Champ magnétique :** Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow c\vec{B}_2 = -\vec{e}_x \times \vec{E}_2$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}\cos(kx+\omega t)\,.\,\vec{e}_z - \frac{E_0}{c}\cos\left(kx+\omega t+\frac{\pi}{2}\right).\,\vec{e}_y$$

Notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_2 = +\frac{E_0}{c}\sin(kx+\omega t)\,.\,\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}\cos(kx+\omega t)\,.\,\vec{e}_z}$$

Notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_2 = \frac{E_0}{c}e^{i(kx+\omega t)}(-i.\vec{e}_y + \vec{e}_z)}$$

9. **Champ total en notation complexe.**

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2 = E_0.e^{ikx}\left[(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}).\vec{e}_y - i.(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}).\vec{e}_z\right]$$

Donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = -2i.E_0.e^{ikx}[\sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_y + \cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_z]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{E} = 2.E_0.\sin(kx)\,[\sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_y + \cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_z]}$$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_1 + \underline{\vec{B}}_2 = \frac{E_0}{c}e^{ikx}\left[i.(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}).\vec{e}_y + (e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}).\vec{e}_z\right]$$

Donc

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = 2\frac{E_0}{c}e^{ikx}[\sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_y + \cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_z]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\cos(kx)\,[\sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_y + \cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_z]}$$

10. **Nature de l'onde :** *Onde stationnaire*.

11. **Vecteur de Poynting :** $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{E}\times\vec{B} = 4\frac{E_0^2}{c}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \sin(kx)\,.\sin(\omega t) & \sin(kx)\cos(\omega t) \\ 0 & \cos(kx)\,.\sin(\omega t) & \cos(kx)\cos(\omega t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$\boxed{\vec{P} = \vec{0}}$ Conclusion : *Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie*.