CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

QUESTIONS DE COURS : (10 *points*)

1. Forme intégrale du théorème d'Ampère.

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}}$$

Forme locale du théorème d'Ampère.

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j}}$$

2. Forme locale de l'équation de continuité.

$$\boxed{div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

La grandeur conservée est la charge du conducteur.

3. Le théorème d'Ampère.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j}$$

Donc

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 . div(\vec{j}) = 0 \quad \text{ou} \quad div(\vec{j}) = 0$$

Et en utilisant l'équation de continuité nous trouvons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

D'où le régime est stationnaire (ou permanent).

4. Relations entre les champs $(\vec{E}, \vec{B})$ et les potentiels $(V, \vec{A})$.

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$$

5. Choix de jauge.

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}') = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}')}$$

$$\overrightarrow{grad}(V') + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\left(V - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial\left(\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)\right)}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(V) - \overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(f)$$

Donc

$$\overrightarrow{grad}(V') + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(V) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}}$$

6. Condition de jauge de LORENTZ.

$$\boxed{div(\vec{A}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

7. Les équations de POISSON dépendantes du temps.

En utilisant la forme locale du théorème de GAUSS

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}div(\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or, d'après la jauge de LORENTZ

$$div(\vec{A}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\Delta V - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Pour le potentiel vecteur

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$$

Or, d'après la jauge de LORENTZ

$$div(\vec{A}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$$

La forme locale de l'équation de MAXWELL–AMPERE

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

D'où

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

En comparant ces deux équations, il vient que

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$$

8. Equations de propagation des potentiels en absence de charges et de courants.

Pour $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$

$$\boxed{\Delta V - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0} \quad ; \quad \boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

EXERCICE 02: (10 *points*)

1. **Symétrie du champ magnétique**

Tous les plans contenant l'axe de symétrie des deux cylindres sont des plans de symétrie.
Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie, alors, le champ magnétique crée par cette distribution de courant tengent au cercle de rayon ρ centré sur le fil droit.

$$\vec{B} = B_\varphi.\vec{e}_\varphi$$

2. **En utilisant le théorème d'ampère :**

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Nous devons choisir la boucle qui respecte la symétrie du champ magnétique. $(\vec{B} = B_\varphi.\vec{e}_\varphi)$
Dans notre cas cette boucle est un cercle de rayon $(\rho = \text{constante})$ centrée sur l'axe des cylindres et contenue dans un plan perpendiculaire à cet axe. Le sens de parcours (intégrale) sur la boucle est le sens trigonométrique (suivant $\vec{e}_\varphi$).

Nous utilisons donc les coordonnées cylindriques et $d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_C (B_\varphi.\vec{e}_\varphi)\bullet(d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z) = \rho\int_0^{2\pi} B_\varphi.d\varphi$$

ρ étant le rayon constant du cercle
En plus, si nous utilisons la symétrie de rotation autour de l'axe du courant : B_φ est constant sur C.
Donc

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \rho.B_\varphi\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho.B_\varphi$$

<u>Calcul des courants à l'intérieur de la boucle fermée d'Ampère.</u>
Calculons d'abord $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ (constants).

$$I = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{s} = \iint (j_1.\vec{e}_z)\bullet(ds.\vec{e}_z) \quad \Rightarrow \quad I = j_1\iint ds = j_1.S_1$$

S_1 est la section du cylindre de rayon a. Donc

$$\boxed{j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{I}{\pi.a^2}}$$

De la même manière

$$-I = \iint \vec{j}_2 \bullet d\vec{s} = \iint (j_2.\vec{e}_z)\bullet(ds.\vec{e}_z) \quad \Rightarrow \quad -I = j_2\iint ds = j_2.S_2$$

S_2 est la section de la couche cylindrique de rayon intérieur $b = 2a$ et de rayon extérieur $c = 3a$.
Donc

$$j_2 = -\frac{I}{S_2} = -\frac{I}{\pi.(c^2 - b^2)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{j_2 = -\frac{I}{5\pi.a^2}}$$

<u>Zone 01</u> : $0 \le \rho \le a$

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{s} = \iint j_1.ds \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = j_1.S_{\text{int}} = \frac{I}{\pi.a^2}\pi.\rho^2$$

$$2\pi\rho.B_\varphi = \mu_0 I\frac{\rho^2}{a^2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec{B}_{\varphi 1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\rho}{a^2}\vec{e}_\varphi}$$

<u>Zone 02</u> : $a \le \rho \le b$

$$\sum I_{\text{int}} = I \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho.B_\varphi = \mu_0 I \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec{B}_{\varphi 2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi}$$

Zone 03 : $b \le \rho \le c$

$$\sum I_{\text{int}} = I + \iint \vec{j}_2 \bullet d\vec{s} = I + \iint j_2 . ds \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = I - \frac{I}{5\pi . a^2}\pi . (\rho^2 - b^2)$$

$$2\pi\rho . B_\varphi = \mu_0 I\left(1 - \left(\frac{\rho^2 - 4a^2}{5a^2}\right)\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 3} = \frac{\mu_0 I}{10\pi}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{a^2}\right)\vec{e}_\varphi}$$

Zone 04 : $c \le \rho < +\infty$

$$\sum I_{\text{int}} = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho . B_\varphi = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 4} = 0 . \vec{e}_\varphi}$$

3. Calculons A_1 et A_2.

$$I = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{s} = \iint \left(\frac{A_1}{\rho}\vec{e}_z\right) \bullet (\rho d\rho d\varphi . \vec{e}_z) \quad \Rightarrow \quad I = A_1 \int_0^a \int_0^{2\pi} d\rho d\varphi = A_1 . 2\pi . a \quad \text{et} \quad \boxed{A_1 = \frac{I}{2\pi . a}}$$

De la même manière

$$-I = \iint \vec{j}_2 \bullet d\vec{s} = \iint \left(\frac{A_2}{\rho}\vec{e}_z\right) \bullet (\rho d\rho d\varphi . \vec{e}_z) \quad \Rightarrow \quad -I = A_2 \int_b^c \int_0^{2\pi} d\rho d\varphi = A_2 . 2\pi . (c - b)$$

Donc

$$\boxed{A_2 = -\frac{I}{2\pi . a}}$$

4. En utilisant le théorème d'ampère : La symétrie cylindrique donne

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = 2\pi\rho . B_\varphi = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$$

Calcul des courants à l'intérieur de la boucle fermée d'Ampère.

Zone 01 : $0 \le \rho \le a$

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{s} = \iint \left(\frac{A_1}{\rho}\vec{e}_z\right) \bullet (\rho d\rho d\varphi . \vec{e}_z) \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = A_1 \int_0^\rho \int_0^{2\pi} d\rho d\varphi = A_1 . 2\pi . \rho$$

$$2\pi\rho . B_\varphi = \mu_0 \frac{I}{2\pi . a} 2\pi . \rho \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi . a}\vec{e}_\varphi}$$

Zone 02 : $a \le \rho \le b$

$$\sum I_{\text{int}} = I \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho . B_\varphi = \mu_0 I \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi}$$

Zone 03 : $b \le \rho \le c$

$$\sum I_{\text{int}} = I + \iint \vec{j}_2 \bullet d\vec{s} = I + \int_b^\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{A_2}{\rho}\vec{e}_z\right) \bullet (\rho d\rho d\varphi . \vec{e}_z) \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = I - A_2 . 2\pi . (\rho - b)$$

$$2\pi\rho . B_\varphi = \mu_0 I\left(1 - \left(\frac{\rho - 2a}{a}\right)\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{3}{\rho} - \frac{1}{a}\right)\vec{e}_\varphi}$$

Zone 04 : $c \le \rho < +\infty$

$$\sum I_{\text{int}} = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho . B_\varphi = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 4} = 0 . \vec{e}_\varphi}$$

EXERCICE 02 : (10 *points*)

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(kx - \omega t).\vec{e}_y$$

1. Direction de propagation x positifs ($\vec{n} = \vec{e}_x$)
   Direction d'oscillation du champ $\vec{e}_y$ (polarisation rectilgne)
   L'onde est donc transversale.

2. **Notation complexe.**

$$\boxed{\underline{\vec{E}_1} = E_0.e^{i(kx-\omega t)}\vec{e}_y}$$

3. **Champ magnétique :**

Direction de propagation $\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad c\vec{B}_1 = \vec{e}_x \times \vec{E}_1$

$$\underline{\vec{B}_1} = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}\left(\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right)$$

Notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}_1} = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}\vec{e}_z}$$

Notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_1 = B_0\cos(kx - \omega t).\vec{e}_z = \frac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t).\vec{e}_z}$$

4. **Equations d'onde réfléchie.**

$\vec{E}_1(x = 0) + \vec{E}_2(x = 0) = \vec{0}$ et $\vec{E}_2(x, t)$ est une OEPPM qui se propage vers les x négatifs.

Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x, t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y}.\cos\left(kx + \omega t + \varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(kx + \omega t + \varphi_z).\vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0.\cos(-\omega t).\vec{e}_y = E_{0y}.\cos\left(\omega t + \varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(\omega t + \varphi_z).\vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y}.\cos\left(\omega t + \varphi_y\right) = -E_0.\cos(\omega t) \\ E_{0z}.\cos(\omega t + \varphi_z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = \text{quelconque} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -E_0.\cos(kx + \omega t).\vec{e}_y}$$

Et en notation complexe :

$$\boxed{\underline{\vec{E}_2} = -E_0.e^{i(kx+\omega t)}\vec{e}_y}$$

5. **Champ magnétique :**

Direction de propagation $-\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad c\vec{B}_2 = -\vec{e}_x \times \vec{E}_2$

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c}\cos(kx + \omega t)\left(-\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right)$$

Notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}\cos(kx + \omega t).\vec{e}_z}$$

Notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i(kx+\omega t)} \vec{e}_z}$$

6. Champ total en notation complexe.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2 = E_0 . e^{ikx} \left(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t} \right) . \vec{e}_y$$

Donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = -2i . E_0 . e^{ikx} \sin(\omega t) . \vec{e}_y}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{E} = 2 . E_0 . \sin(kx) \sin(\omega t) . \vec{e}_y}$$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_1 + \underline{\vec{B}}_2 = \frac{E_0}{c} e^{ikx} \left(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t} \right) . \vec{e}_z$$

Donc

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = 2 \frac{E_0}{c} e^{ikx} \cos(\omega t) . \vec{e}_z}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) . \vec{e}_z}$$

7. Nature de l'onde résultante : *Onde stationnaire*.

8. Plans nodaux :

Champ électrique :

$$2 . E_0 . \sin(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2n \frac{\lambda}{4}} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Champ magnétique :

$$2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = (2n+1) \frac{\lambda}{4}} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Plans ventraux :

Champ électrique :

$$2 . E_0 . \sin(kx) = \pm 2E_0 \quad \Rightarrow \quad kx = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = (2n+1) \frac{\lambda}{4}} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Champ magnétique :

$$2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) = \pm 2 \frac{E_0}{c} \quad \Rightarrow \quad kx = n\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2n \frac{\lambda}{4}} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

9. Déphasage :

Les plans ventraux du champ électrique correspondent aux plans nodaux du champ magnétique et vice-et-versa. Donc le champ électrique est en quadrature de phase avec le champ magnétique.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta\phi = \frac{\pi}{2}}$$