CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

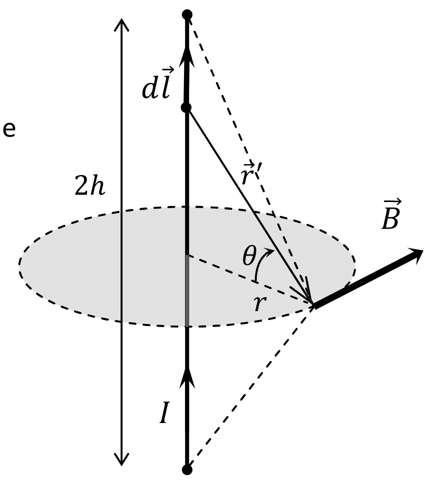
MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01: (10 *points*)

1. Calcul du module du champ magnétostatique créé par le segment.

A partie de la loi de Biot et Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}'}{r'^3}$$



Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}'$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon r et et centré sur le fil droit, donc

$$\left|d\vec{l} \times \vec{r}'\right| = dl . r' . \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = dl . r' . \cos(\theta)$$

Paramétrage : $(-\theta_0 \leq \theta \leq +\theta_0)$ avec $\sin\theta_0 = h/\sqrt{h^2 + r^2}$

$$dl = \frac{r}{\cos^2\theta} d\theta \quad \text{et} \quad r' = \frac{r}{\cos\theta}$$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{r'^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta . d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r} [\sin\theta]_{-\theta_0}^{+\theta_0} = \frac{\mu_0 . I}{2\pi . r} \sin\theta_0$$

Enfin

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}}$$

2. Vecteur champ magnétostatique.

- Les plans de symétries sont les plans contenant le segment de droite.
- Le vecteur champ magnétostatique est toujours perpendiculaire au plan de symétrie.

Dons, en coordonnées cylindriques.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \vec{e}_\varphi}$$

Le plan contenant le segment $[a, b]$ et sa médiatrice passant par M est un plan de symétrie de la distribution de courant donc est perpendiculaire à ce plan.

3. Direction du champ magnétostatique au point M.

- Les champs créés par les segments $[a, b]$ et $[c, d]$ ont le même module et sont symétriques par rapport à l'axe (OZ). La résultante de ces deux champs est donc dans la direction de l'axe (OZ).
- Les champs créés par les segments $[b, c]$ et $[d, a]$ ont le même module et sont symétriques par rapport à l'axe (OZ). La résultante de ces deux champs est donc dans la direction de l'axe (OZ).
- D'où le champ total est parallèle à l'axe (OZ).

4. Vecteur champ magnétostatique total créé par le circuit au point M.

L'angle que fait le champ crée par un ségment avec l'axe OZ est noté .
Le champ total est alors égal à

$$\vec{B}_{\text{tot}} = -4\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\right)\cos\phi\ \vec{e}_z$$

Avec

$$\cos\phi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \frac{h}{r}$$

Donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = -2\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{r^2}\frac{h^2}{\sqrt{h^2+r^2}}\ \vec{e}_z$$

On peut aussi écrire $r^2 = h^2 + z^2$, donc

$$\boxed{\vec{B}_{\text{tot}}(M) = -2\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{h^2+z^2}\frac{h^2}{\sqrt{2h^2+z^2}}\ \vec{e}_z}$$

5. Expression du vecteur champ magnétostatique au centre du circuit O.

Au centre du circuit $z = 0$ ou $r = h$.

$$\boxed{\vec{B}_{\text{tot}}(O) = -\sqrt{2}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{h}\ \vec{e}_z}$$

6. Justification de l'orientation du champ magnétostatique.

Le plan contenant le circuit est le seul plan de symétrie passant par le point O. donc le champ magnétostatique en ce point est perpendiculaire au plan de symétrie et par conséquent parallèle à l'axe (OZ).

EXERCICE 02: (10 *points*)

$$\vec{E}_1 = E_{0x}.\cos(kz-\omega t+\varphi_x).\vec{e}_x + E_{0y}.\cos(kz-\omega t+\varphi_y).\vec{e}_y$$

1. Polarisation rectiligne.

$E_{0x}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = E_{0y}.\cos(kz-\omega t+\varphi_y).\vec{e}_y$: polarisation rectiligne suivant l'axe (Oy).

$E_{0y}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = E_{0x}.\cos(kz-\omega t+\varphi_x).\vec{e}_x$: polarisation rectiligne suivant l'axe (Ox).

$\varphi = \varphi_y - \varphi_y = n\pi$: polarisation rectiligne dans le plan (Oxy) faisant un angle α avec l'axe (Ox), tel que $E_{0y}/E_{0x} = \tan\alpha$.

2. Polarisation circulaire.

$$\boxed{E_{0x}=E_{0y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \varphi_y - \varphi_y = (2n+1)\frac{\pi}{2}}$$

Si n est pair, la polarisation est circulaire gauche (sens direct ou trigonométrique).
Si n est impair, la polarisation est circulaire droite (sens indirect, opposé au sens trigonométrique).

3. Champ électrique en notation complexe.

$$E_{0x}=E_{0y}=E_0 \quad ; \quad \varphi_x = 0 \quad ; \quad \varphi_y = -\pi/2$$

L'onde est donc polarisée circulairement dans sens indirect (droite)

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(kz-\omega t).\vec{e}_x + E_0.\cos(kz-\omega t-\pi/2).\vec{e}_y$$

Ou

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(kz-\omega t).\vec{e}_x + E_0.\sin(kz-\omega t).\vec{e}_y$$

En notation complexe

$$\underline{\vec{E}_1} = E_0.e^{i(kz-\omega t)}.\vec{e}_x + E_0.e^{i(kz-\omega t-\pi/2)}.\vec{e}_y$$

Et donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}_1} = E_0.e^{i(kz-\omega t)}.(\vec{e}_x - i.\vec{e}_y)}$$

4. Expression du champ magnétique.

Vecteur unitaire dans la direction de propagation : $\boxed{\vec{n}=\vec{e}_z}$

La relation de structure

$$\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}_1} = c.\underline{\vec{B}_1}$$

Donc

$$\underline{\vec{B}_1} = \frac{E_0}{c}.e^{i(kz-\omega t)}.\left(\vec{e}_z \times (\vec{e}_x - i.\vec{e}_y)\right)$$

Et

$$\boxed{\underline{\vec{B}_1} = \frac{E_0}{c}.e^{i(kz-\omega t)}.(i.\vec{e}_x + \vec{e}_y)}$$

En notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_x + \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t).\vec{e}_y}$$

Ou

$$\boxed{\vec{B}_1 = -\frac{E_0}{c}\sin(kz-\omega t).\vec{e}_x + \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t).\vec{e}_y}$$

5. Onde circulaire gauche se propageant vers les z croissants.

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0 \quad ; \quad \varphi_x = 0 \quad ; \quad \varphi_y = +\pi/2$$

Donc

$$\boxed{\vec{E}_2 = E_0.\cos(kz - \omega t).\vec{e}_x + E_0.\cos(kz - \omega t + \pi/2).\vec{e}_y}$$

Ou

$$\boxed{\vec{E}_2 = E_0.\cos(kz - \omega t).\vec{e}_x - E_0.\sin(kz - \omega t).\vec{e}_y}$$

En notation complexe

$$\underline{\vec{E}_2} = E_0.e^{i(kz-\omega t)}.\vec{e}_x + E_0.e^{i(kz-\omega t+\pi/2)}.\vec{e}_y$$

Et donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}_2} = E_0.e^{i(kz-\omega t)}.\left(\vec{e}_x + i.\vec{e}_y\right)}$$

6. Expression du champ magnétique.

Vecteur unitaire dans la direction de propagation : $\boxed{\vec{n} = \vec{e}_z}$

La relation de structure

$$\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}_2} = c.\underline{\vec{B}_2}$$

Donc

$$\underline{\vec{B}_2} = \frac{E_0}{c}.e^{i(kz-\omega t)}.\left(\vec{e}_z \times \left(\vec{e}_x + i.\vec{e}_y\right)\right)$$

Et

$$\boxed{\underline{\vec{B}_2} = \frac{E_0}{c}.e^{i(kz-\omega t)}.\left(-i.\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)}$$

En notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}\cos\left(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_x + \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t).\vec{e}_y}$$

Ou

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}\sin(kz - \omega t).\vec{e}_x + \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t).\vec{e}_y}$$

7. Onde résultante.

Champ électrique en notation réelle

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_0.\cos(kz - \omega t).\vec{e}_x}$$

Champ électrique en notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_1} + \underline{\vec{E}_2} = 2E_0.e^{i(kz-\omega t)}.\vec{e}_x}$$

Champ magnétique en notation réelle

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2\frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t).\vec{e}_y}$$

Champ magnétique en notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_1} + \underline{\vec{B}_2} = 2\frac{E_0}{c}e^{i(kz-\omega t)}.\vec{e}_y}$$

Remarque : les deux ondes n'interfèrent pas car elles se propagent dans le même sens et elles sont toujours en phase.

8. Nature de l’onde.

$$\vec{E} = 2E_0.\cos(kz - \omega t)\,.\,\vec{e}_x$$

C’est une OEPPM (Onde Electromagnétique Plane Progressive et Monochromatique) de polarisation rectiligne suivant l’axe (Ox) et se propageant suivant l’axe (Oz) vers les z croissants.

Le champ magnétique étant toujours perpendiculaire au champ électrique et à la direction de propagation (axe (Oy)).

9. Vecteur de Poynting.

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{e}_z$$

Donc

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(kz - \omega t)\,\vec{e}_z$$

Comme la valeur moyenne sur une période de

$$\langle\cos^2(kz - \omega t)\rangle_T = \frac{1}{2}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\boxed{\langle\vec{P}\rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\vec{e}_z}$$