CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01: (10 *points*)

1. Charge totale.

$$dq = \rho.d\tau = \frac{\lambda_0}{r^2}r^2.\sin\theta.drd\theta d\varphi \quad \text{pour} \quad a \le r \le b$$

D'où

$$Q_{\text{tot}} = \int dq = \lambda_0 \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta.drd\theta d\varphi$$

Et

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = 4\pi\lambda_0(b-a) = 4\pi\lambda_0 a}$$

2. Direction du champ électrostatique en un point quelconque de l'espace.

- La densité volumique de charge ne dépend que de r, donc elle est indépendante de θ et φ.
- Tous les points ayant la même distance r du centre sont équivalents et la symétrie est sphérique.
- Tous les axes passant par le centre de cette distribution sont des axes de symétrie.
- Le champ électrostatique en un point situé sur un axe de symétrie est parallèle à l'axe de symétrie.
- Le champ électrostatique en un point quelconque de l'espace est donc radial.

$$\boxed{\vec{E}(r) = E_r.\vec{e}_r}$$

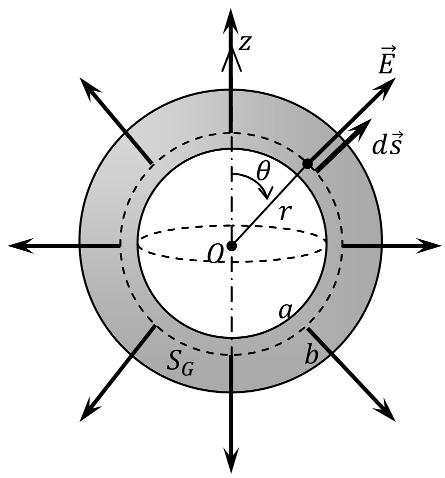
3. Champ électrostatique au centre de la coquille.

Le champ électrostatique au point d'intersection de plusieurs axes de symétrie est nul. Donc,

$$\boxed{\vec{E}(O) = \vec{0}}$$

4. Théorème de Gauss.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Symétrie du champ électrostatique : Sphérique.
Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon r.

Comme $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_G} E.ds$$

En plus, en utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que $E =$ Constante (en module) sur la surface de GAUSS S_G . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E.S_G$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.4\pi.r^2}$$

Calcul de la charge à l'intérieur de la surface de Gauss :

A l'intérieur de la cavité sphérique $0 \leq r \leq a$:

$$\sum Q_{\text{int}} = 0$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}_{\text{int}}(r) = \vec{0}}$$

A l'intérieur de la coquille sphérique $a \leq r \leq b$:

Distribution volumique uniforme $dq = \rho.d\tau$

$$\sum Q_{\text{int}} = \int dq = \lambda_0 \int_a^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\,.drd\theta d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \sum Q_{\text{int}} = 4\pi\lambda_0.(r-a)$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{4\pi\lambda_0}{\varepsilon_0}(r-a) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}_{\text{couche}}(r) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{r-a}{r^2}\vec{e}_r}$$

A l'extérieur de la coquille sphérique $b \leq r < +\infty$:

Distribution volumique uniforme $dq = \rho.d\tau$

$$\sum Q_{\text{int}} = \int dq = \lambda_0 \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\,.drd\theta d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \sum Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}} = 4\pi\lambda_0 a$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{4\pi\lambda_0 a}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{r^2}\vec{e}_r} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = K\frac{Q_{\text{tot}}}{r^2}\vec{e}_r}$$

5. Forme locale

A l'intérieur de la cavité sphérique $0 \leq r \leq a$:

$$div(\vec{E}_{\text{int}}) = 0$$

A l'intérieur de la coquille sphérique $a \leq r \leq b$:

$$div(\vec{E}_{\text{couche}}) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{r-a}{r^2}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{r-a}{r^2}\right) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{r^2-2r(r-a)}{r^4} + 2\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{r-a}{r^3} = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

D'où

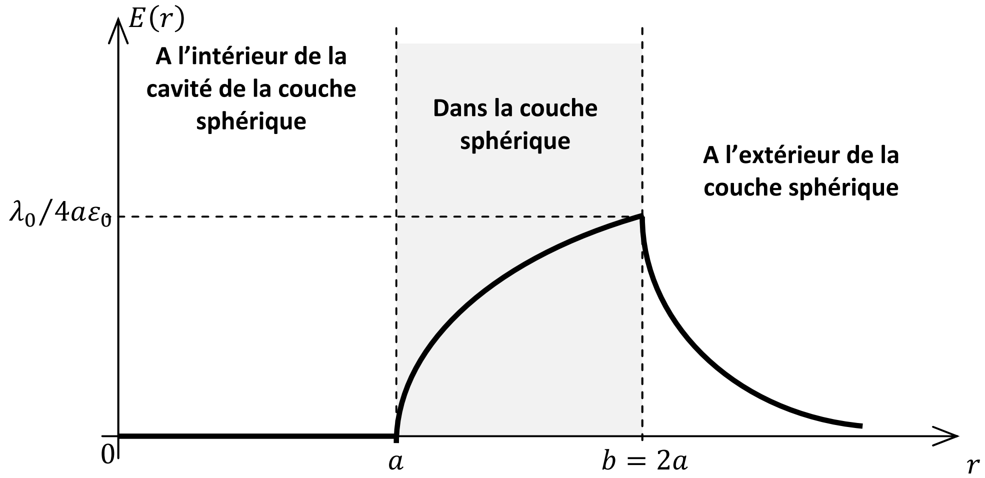
$$div(\vec{E}_{\text{couche}}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

A l'extérieur de la coquille sphérique $b \leq r < +\infty$:

$$div(\vec{E}_{\text{ext}}) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{r^2}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{r^2}\right) = -2\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{r^3} + \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{r^3} = 0$$

Dans chaque zone on retrouve la forme locale du théorème de Gauss avec la densité volumique de charge qui correspond à cette zone.

6. Représentation du champ.



7. Que peut-on dire, dans ce cas, sur la continuité du champ électrostatique?

Puisque la distribution de charges est volumique, alors la ***composante normale*** du champ électrostatique (E_r), qui est dans notre cas la seule composante non nulle du champ, ***est continue dans tout l'espace***, notamment aux différent points de changement de zone ($r = a$ et $r = b$) (points de discontinuité de la distribution de charges).

<u>**QUESTIONS DE COURS :**</u> **(03 *points*)**

1. Equation de Poisson du potentiel scalaire V.

Forme locale du théorème de Gauss

$$div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$$

Relation du champ avec le potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

En remplaçant dans le théorème de Gauss

$$-div\left(\overrightarrow{grad}(V)\right) = -\Delta V = \rho/\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

2. Equation de Poisson du potentiel vecteur $\vec{A}$.

Forme locale du théorème d'Ampère

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\vec{J}$$

Relation du champ avec le potentiel

$$\vec{B} = -\overrightarrow{rot}(\vec{A})$$

En remplaçant dans le théorème de Gauss

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

En utilisant la jauge de Coulomb $div(\vec{A}) = 0$, on trouve

$$\boxed{\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{J} = \vec{0}}$$

EXERCICE 02: **(07 *points*)**

1. **Densité volumique de courant crée par le mouvement de charge**

$$\vec{j} = \rho.\vec{v} = \rho_0(r.\omega.\vec{e}_\varphi)$$

D'où

$$\boxed{\vec{j} = \rho_0\omega.r.\vec{e}_\varphi}$$

Distribution de courant stationnaire.

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_r}{\partial r} + \frac{1}{r}j_r + \frac{1}{r}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Comme : $j_r = j_z = 0$ et $j_\varphi = \rho_0\omega.r$. Donc :

$$\boxed{div(\vec{j}) = 0}$$

Le courant est donc stationnaire et le champ magnétique crée est statique

2. **Loi de Biot et Savart :** Le champ magnétostatique élémentaire $d\vec{B}$ crée par un élément de volume $d\tau$ contenant une densité volumique de courant $\vec{j}$ est donné par :

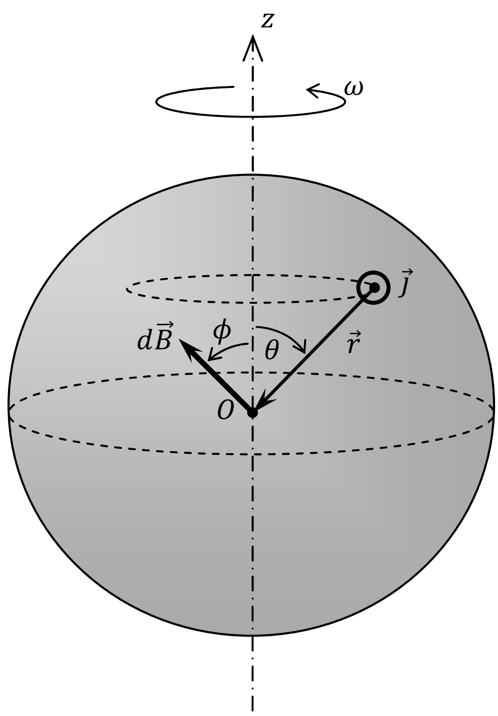
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}d\tau$$

Dans notre cas :

- $\vec{r} = -r.\vec{e}_r$ (le vacteur est dirigé du courant volumique vers le point O).
- $\vec{j} \perp \vec{r}$ car $\vec{j} \parallel \vec{e}_\varphi$ et $\vec{r} \parallel \vec{e}_r$.

D'où, le module du champ magnétostatique élémentaire

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{j.r}{r^3}d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\rho_0\omega}{r}d\tau$$



En utilisant la symétrie : La résultante de deux champs élémentaires crées par des courants appartenant au même plan parallèle à (Oxy) et se trouvant de part et d'autre de l'axe (Oz), sera parallèle à (Oz). D'où en faisant la somme (intégrale) de ces vecteur champs élémentaires la résultante totale sera, elle aussi, suivant l'axe (Oz).
D'où, il suffit d'intégrer uniquement la composante suivant l'axe (Oz).

$$dB_z = dB.\cos\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{j.r}{r^3}d\tau.\cos\phi$$

Comme $\phi = \pi/2 - \theta$ donc $\cos\phi = \sin\theta$ et :

$$B_z = \int dB_z = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\rho_0\omega}{r}d\tau.\sin\theta$$

Paramétrage : On utilise les coordonnées sphériques.

$$d\tau = r^2.\sin\theta\,.drd\theta d\varphi$$

Avec

$$0 \le r \le a \quad ; \quad 0 \le \theta \le \pi \quad ; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Il en résulte

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\rho_0\omega\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r.\sin^2\theta\,.drd\theta d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\rho_0\omega\left(\int_0^a r.dr\right)\times\left(\int_0^\pi \sin^2\theta\,.d\theta\right)\times\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$

On utilise $2.\sin^2\theta = 1-\cos(2\theta)$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\rho_0\omega\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^a\times\left[\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_0^\pi\times[\varphi]_0^{2\pi}$$

Ce qui donne finalement

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0}{8}\rho_0\omega\pi.a^2}$$

Et le vecteur champ magnétostatique au point O.

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{8}\rho_0\omega\pi.a^2.\vec{e}_z}$$

3. Justification de la direction du champ magnétique.

Le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution de courant.
Le champ au point O appartenant au plan de symétrie doit donc, être perpendiculaire au plan de symétrie (Oxy).
D'où :

$$\vec{B}(O) \parallel \vec{e}_z$$