FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME

DURÉE : 60 minutes.

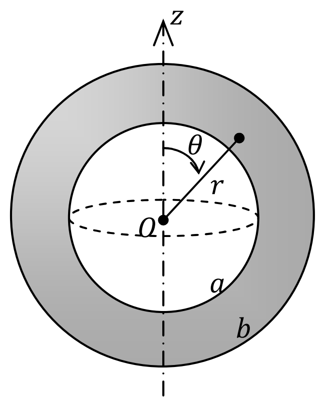
Nom et Prénom : John Doe	Signature :	Note : /20

Exercice 01 : Champ électrostatique (10 points)

Une coquille sphérique de rayon intérieur a et de rayon extérieur $b = 2a$ est chargée avec une densité volumique :

$$\rho(r) = \frac{\sigma_0}{r} \quad \text{pour} \quad a \le r \le b$$

Tel que r est la distance par rapport au centre de la sphère, et σ_0 est une constante.



1. Déterminer la charge totale $Q_{\text{tot}} = Q$ de la coquille sphérique.

$dq = \rho . d\tau = \frac{\sigma_0}{r} r^2 . \sin\theta . dr d\theta d\varphi \quad \text{pour} \quad a \le r \le b$

D'où

$$Q_{\text{tot}} = \int dq = \sigma_0 \int_a^{2a} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r . \sin\theta . dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{\text{tot}} = \sigma_0 \int_a^{2a} r . dr \int_0^{\pi} \sin\theta . d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma_0 \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{2a} [-\cos\theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi}$$

Et $\boxed{Q_{\text{tot}} = 6\pi\sigma_0 a^2}$

2. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le vecteur champ électrostatique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace.

La densité de charge ne dépend que de r , la symétrie est sphérique

Le champ en un point quelconque de l'espace est donc radial $\boxed{\vec{E}(r) = E_r . \vec{e}_r}$

Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon r.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Comme $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_G} E . ds$$

En utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que $E = \text{constante}$ (en module) sur la surface de GAUSS S_G

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E . S_G$$

Nous obtenons donc : $\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E . 4\pi . r^2}$

Zone 01 : Champ à l'intérieur de la cavité sphérique $0 \le r \le a$:

$$\sum Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E.4\pi.r^2 = 0 \quad et \quad \boxed{\vec{E}_1(r) = \vec{0}}$$

Zone 02 : Champ à l'intérieur de la coquille sphérique $a \le r \le b$:

Distribution volumique non uniforme $dq = \rho.d\tau$

$$\sum Q_{\text{int}} = \int dq = \sigma_0 \int_a^r \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r.\sin\theta\,.drd\theta d\varphi \Rightarrow \sum Q_{\text{int}} = 2\pi\sigma_0.(r^2 - a^2)$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{2\pi\sigma_0}{\varepsilon_0}(r^2 - a^2) \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2(r) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_r}$$

Zone 03 : Champ à l'extérieur de la coquille sphérique $b \le r < +\infty$:

$$\sum Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}} = 6\pi\sigma_0 a^2$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{6\pi\sigma_0 a^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_3(r) = \frac{3\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r}$$

3. Calculer à partir de 2, l'expression de $div(\vec{E})$ pour chaque zone. Que remarquez-vous ?

Pour un champ de symétrie sphérique (radial) $E_\theta = E_\varphi = 0$ *donc*

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r}E_r$$

Zone 01 : à l'intérieur de la cavité sphérique $0 \le r \le a$:

$$\vec{E}_1(r) = \vec{0} \Rightarrow div(\vec{E}_1) = 0 \quad et \quad \rho_1 = 0$$

Zone 02 : à l'intérieur de la coquille sphérique $a \le r \le b$:

$$div(\vec{E}_2) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\right) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^3} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^3} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}$$

Zone 03 : à l'extérieur de la coquille sphérique $b \le r < +\infty$:

$$div(\vec{E}_3) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{3\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right) = -2\frac{3\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} + 2\frac{3\sigma_0 a^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} = 0 = \frac{\rho_3}{\varepsilon_0}$$

4. A partir de la forme locale du théorème de Gauss, trouver l'équation de Poisson du potentiel scalaire V.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \quad et \quad div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$$

Donc $-div\left(\overrightarrow{grad}(V)\right) = \rho/\varepsilon_0$

Et l'équation de Poisson

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Remarque : Toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de ε_0, a, Q et r.

On donne en coordonnées sphériques :

$$d\tau = r^2.\sin\theta\,.dr.d\theta.d\varphi$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r}A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\tan\theta}A_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

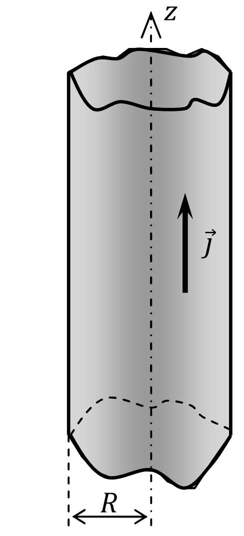
Nom et Prénom : John Doe	Signature :

Exercice 02 : Champ magnétostatique (10 points)

Soit un conducteur cylindrique droit de rayon R et de longueur infinie. Ce conducteur est parcouru par un courant ayant une intensité $I =$ constante (sur sa section) et distribué avec une densité volumique de courant :

$$\vec{j} = A\rho.\vec{e}_z$$

ρ étant la distance par rapport à l'axe du cylindre (Oz) et A une constante positive.



1. Vérifier que cette distribution de courant est stationnaire.

Calculons $div(\vec{j})$

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} j_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Comme $j_\rho = j_\varphi = 0$

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial}{\partial z}(A\rho) = 0$$

D'où la distribution de courants est stationnaire

2. Trouver la valeur de la constante A en fonction de I et R.

$$I = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint (A\rho.\vec{e}_z) \bullet (ds.\vec{e}_z) = \int_0^R \int_0^{2\pi} A\rho.\rho d\rho d\varphi$$

D'où

$$I = A\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi A \frac{R^3}{3}$$

Et donc

$$\boxed{A = \frac{3I}{2\pi R^3}}$$

3. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le vecteur champ magnétostatique $\vec{B}(\rho)$ en tout point de l'espace.

Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont des plans de symétrie

Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie

étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie, alors : $\vec{B} = B_\varphi.\vec{e}_\varphi$

En utilisant le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

La boucle choisie est un cercle de rayon ρ centrée sur l'axe du cylindre

En coordonnées cylindriques $d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \int_C (B_\varphi.\vec{e}_\varphi) \bullet (d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z) = \rho \int_0^{2\pi} B_\varphi.d\varphi$$

En utilisant la symétrie de rotation autour de l'axe du courant

B_φ *est constant sur la boucle*

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \rho.B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho.B_\varphi$$

Champ à l'intérieur du cylindre $0 \leq \rho \leq R$ *:*

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint (A\rho.\vec{e}_z) \bullet (ds.\vec{e}_z) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} A\rho.\rho d\rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = 2\pi A \frac{\rho^3}{3} = I \frac{\rho^3}{R^3}$$

En remplaçant, nous trouvons

$$2\pi\rho.B_\varphi = \mu_0.2\pi A \frac{\rho^3}{3} = \mu_0.I \frac{\rho^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{\text{int}}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R^3} \rho^2.\vec{e}_\varphi}$$

Champ à l'extérieur du cylindre $R \leq \rho < +\infty$ *:*

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint (A\rho.\vec{e}_z) \bullet (ds.\vec{e}_z) = \int_0^R \int_0^{2\pi} A\rho.\rho d\rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = 2\pi A \frac{R^3}{3} = I$$

En remplaçant, nous trouvons

$$2\pi\rho.B_\varphi = \mu_0.I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{\text{ext}}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi}$$

4. Montrer que le théorème d'Ampère n'est valable que dans le cas d'un régime stationnaire (utiliser la forme locale du théorème).

Forme locale du théorème d'Ampère

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j}$$

D'où

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0.div(\vec{j}) = 0$$

Nous trouvons donc que

$$div(\vec{j}) = 0$$

Et par conséquent le courant est stationnaire

Remarque : Toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de μ_0, R, I et ρ.

On donne en coordonnées cylindriques :

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_z$$