Corrigé de l'Épreuve Semestrielle

EXERCICE 01 : *(08 points)*

1. $\boxed{div(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B})=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0.\vec{j}+\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

2. $div(\overrightarrow{rot}(\vec{B}))=0=\mu_0.div(\vec{j})+\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial}{\partial t}div(\vec{E})$ et puisque $div(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ alors :

$\mu_0.div(\vec{j})+\mu_0.\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{div(\vec{j})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$ c.q.f.d.

3. En absence de charges ($\rho=0$) et de courants ($\vec{j}=\vec{0}$).

$\boxed{div(\vec{E})=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B})=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

4. Calculons $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E}))=-\frac{\partial\overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E}))=\overrightarrow{grad}(div(\vec{E}))-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$ ($div(\vec{E})=0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

Calculons $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B}))=\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B}))=\overrightarrow{grad}(div(\vec{B}))-\Delta\vec{B}=-\Delta\vec{B}$ ($div(\vec{B})=0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{B}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

5. $\boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B}=\overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

6. $\boxed{div(\vec{A})+\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}=0}$ avec $\vec{A}(\infty)=\vec{0}$ et $V(\infty)=0$

7. $div(\vec{E})=div\left(-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad -\Delta V-\frac{\partial div(\vec{A})}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A})=-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$ donc $\boxed{\Delta V-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$ or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A}) = -\mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t}$

Donc $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = -\mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

D'où $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$

8. ($\rho = 0$) et ($\vec{j} = \vec{0}$) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$ et $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

9. $\boxed{\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2\mu_0} B^2}$ et $\boxed{\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$

EXERCICE 02 : ***(06 points)***

$$\vec{E} = E_0.\cos(k.y + \omega.t)\vec{e}_x + E_0.\cos(k.y + \omega.t + \pi/2)\vec{e}_z$$

1. Onde plane se propageant suivant l'axe OY dans la direction des y décroissants, donc :

$$\boxed{\vec{n} = -\vec{e}_y}$$

2. $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2.10^8 Hz$; $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 1{,}5m$; $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = -\dfrac{4\pi}{3}\vec{e}_y$

3. Différence de phase $\boxed{\varphi = \varphi_x - \varphi_z = 0 - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ polarisation circulaire ($E_{0x} = E_{0z}$) droite.

4. $\vec{\mathscr{E}} = E_0 e^{i(k.y+\omega.t)}.\vec{e}_x + E_0 e^{i(k.y+\omega.t)}.e^{i(\pi/2)}.\vec{e}_z$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\mathscr{E}} = E_0.(\vec{e}_x + i.\vec{e}_z)e^{i(k.y+\omega.t)}}$

5. $\vec{n} = -\vec{e}_y$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{(-\vec{e}_y)\times\vec{E}}{c}$ donc :

$\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}.\cos(k.y + \omega.t)\vec{e}_z - \dfrac{E_0}{c}.\cos(k.y + \omega.t + \pi/2)\vec{e}_x}$ et $\boxed{\vec{\mathscr{B}} = \dfrac{E_0}{c}.(\vec{e}_z - i.\vec{e}_x)e^{i(k.y+\omega.t)}}$

6. $\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P} = \dfrac{E^2}{\mu_0.c}\vec{n}$ ($B = \dfrac{E}{c}$)

Or $\vec{n} = -\vec{e}_y$ et $E^2 = E_0^2.\cos^2(k.y + \omega.t) + E_0^2.\sin^2(k.y + \omega.t) = E_0^2$ d'où $\boxed{\vec{P} = -\dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_y}$

Module du vecteur de POYNTING $P = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c} = Cte$ $\Rightarrow$ $\boxed{\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}}$

7. $\iint \vec{P} \bullet d\vec{S} = \dfrac{\partial U_{em}}{\partial t}$ $\quad (\vec{P} \perp d\vec{S}$ et $P = Cte$ sur $S) \Rightarrow \dfrac{\partial U_{em}}{\partial t} = \mathscr{P} = P.S$

$$\boxed{\langle \mathscr{P} \rangle = \langle P \rangle.S = \frac{E_0^2.S}{\mu_0.c}}$$

A.N : $\boxed{\langle \mathscr{P} \rangle = 20mW}$

EXERCICE 03 : *(06 points)*

1.

$\vec{E}_1 = E_0.e^{i(\omega.t - k.x)}\vec{e}_y$ et $\vec{E}_2 = \alpha.E_0.e^{i(\omega.t + k.x)}\vec{e}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0.e^{i(\omega.t)}\left[\alpha.e^{i(k.x)} + e^{-i(k.x)}\right]\vec{e}_y}$

Direction de propagation suivant l'axe OX :

$\vec{B}_1 = \dfrac{(\vec{e}_x) \times \vec{E}_1}{c}$ (dans le sens des x croissants) $\Rightarrow \vec{B}_1 = \dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega.t - k.x)}\vec{e}_z$

$\vec{B}_2 = \dfrac{(-\vec{e}_x) \times \vec{E}_2}{c}$ (dans le sens des x décroissants) $\Rightarrow \vec{B}_2 = -\dfrac{E_0}{c} e^{i(\omega.t + k.x)}\vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega.t)}\left[-\alpha.e^{i(k.x)} + e^{-i(k.x)}\right]\vec{e}_z}$$

2. Amplitude complexe (d'après l'expression de $\vec{E}$) $\boxed{\vec{\mathscr{E}}_0 = E_0\left[\alpha.e^{i(k.x)} + e^{-i(k.x)}\right]\vec{e}_y}$

Ou $\vec{\mathscr{E}}_0 = E_0\left[\alpha.(\cos kx + i.\sin kx) + (\cos kx - i.\sin kx)\right]\vec{e}_y \Rightarrow \boxed{\vec{\mathscr{E}}_0 = E_0\left[(\alpha+1).\cos kx + i.(\alpha-1).\sin kx\right]\vec{e}_y}$

3. Amplitude réelle : $E = \left|\vec{\mathscr{E}}_0\right| = E_0\sqrt{(\alpha+1)^2.\cos^2 kx + (\alpha-1)^2.\sin^2 kx}$

$E = E_0\sqrt{\alpha^2.+1+2\alpha\left(\cos^2 kx - \sin^2 kx\right)} \Rightarrow \boxed{E = E_0\sqrt{\alpha^2.+1+2\alpha.\cos(2kx)}}$

4.

$E_{max} \Rightarrow \cos(2kx) = 1 \Rightarrow 2kx = 2n\pi \Rightarrow \boxed{x = 2n.\dfrac{\lambda}{4}}$ et $\boxed{E_{max} = E_0\sqrt{\alpha^2.+1+2\alpha} = E_0|\alpha+1|}$

$E_{min} \Rightarrow \cos(2kx) = -1 \Rightarrow 2kx = (2n+1)\pi \Rightarrow \boxed{x = (2n+1).\dfrac{\lambda}{4}}$ et $\boxed{E_{min} = E_0\sqrt{\alpha^2.+1-2\alpha} = E_0|\alpha-1|}$

5. Taux d'onde stationnaire : $\boxed{S = \dfrac{E_{max}}{E_{min}} = \left|\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|}$