Corrigé de l’Épreuve Semestrielle

EXERCICE 01 : ***(07 points)***

1. $\boxed{div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B}) = 0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 . \varepsilon_0 . \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

2. $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0 = \mu_0 . div(\vec{j}) + \mu_0 . \varepsilon_0 . \dfrac{\partial}{\partial t} div(\vec{E})$ et puisque $div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ alors :

$\mu_0 . div(\vec{j}) + \mu_0 . \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{div(\vec{j}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ c.q.f.d.

3. En absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$\boxed{div(\vec{E}) = 0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B}) = 0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \varepsilon_0 . \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

4. Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D’autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$ ($div(\vec{E}) = 0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D’où l’équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0 . \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 . \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D’autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{B})\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ ($div(\vec{B}) = 0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

D’où l’équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{B} - \mu_0 . \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

5. $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

6. $\boxed{div(\vec{A}) + \mu_0 . \varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0}$ avec $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ et $V(\infty) = 0$

7. $div(\vec{E}) = div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial div(\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $\quad div(\vec{A}) = -\mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$ $\quad$ donc $\quad \boxed{\Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$ $\quad$ or, d'après la jauge de LORENTZ $\quad div(\vec{A}) = -\mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$

Donc $\quad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$

D'autre part $\quad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad$ et $\quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

D'où $\quad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{grad}(V) - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\quad \boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$

8. $(\rho = 0)$ et $(\vec{j} = \vec{0}) \Rightarrow \boxed{\Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$ $\quad$ et $\quad \boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

9. $\boxed{\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2}$ $\quad$ et $\quad \boxed{\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}$

EXERCICE 02 : ***(07 points)***

$$\vec{E} = E_0.\cos(k.y + \omega.t)\vec{e}_x + E_0.\cos(k.y + \omega.t + \pi/2)\vec{e}_z$$

1. Onde plane se propageant suivant l'axe OY dans la direction des y décroissants, donc :
$$\boxed{\vec{n} = -\vec{e}_y}$$

2. $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2.10^8\,Hz$; $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 1{,}5m$; $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = -\dfrac{4\pi}{3}\vec{e}_y$

3. Différence de phase $\boxed{\varphi = \varphi_z - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ polarisation circulaire ($E_{0x} = E_{0z}$) gauche.

4. $\vec{\mathscr{E}} = E_0 e^{i(k.y+\omega.t)}.\vec{e}_x + E_0 e^{i(k.y+\omega.t)}.e^{i(\pi/2)}.\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathscr{E}} = E_0.(\vec{e}_x + i.\vec{e}_z)e^{i(k.y+\omega.t)}}$

5. $\vec{n} = -\vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{(-\vec{e}_y)\times\vec{E}}{c}$ donc :

$\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}.\cos(k.y + \omega.t)\vec{e}_z - \dfrac{E_0}{c}.\cos(k.y + \omega.t + \pi/2)\vec{e}_x}$ et $\boxed{\vec{\mathscr{B}} = \dfrac{E_0}{c}.(\vec{e}_z - i.\vec{e}_x)e^{i(k.y+\omega.t)}}$

6. $\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P} = \dfrac{E^2}{\mu_0.c}\vec{n}$ ($B = \dfrac{E}{c}$)

Or $\vec{n} = -\vec{e}_y$ et $E^2 = E_0^2.\cos^2(k.y + \omega.t) + E_0^2.\sin^2(k.y + \omega.t) = E_0^2$ d'où $\boxed{\vec{P} = -\dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_y}$

Module du vecteur de POYNTING $P = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c} = Cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}}$

7. $\iint \vec{P}\bullet d\vec{S} = \dfrac{\partial U_{em}}{\partial t}$ ($\vec{P} \perp d\vec{S}$ et $P = Cte$ sur S) $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial U_{em}}{\partial t} = \mathscr{P} = P.S$

$\boxed{\langle\mathscr{P}\rangle = \langle P\rangle.S = \dfrac{E_0^2.S}{\mu_0.c}}$ A.N : $\boxed{\langle\mathscr{P}\rangle = 20mW}$

EXERCICE 03 : ***(06 points)***

1. $$\boxed{\vec{E} = E_0.e^{i(k.x-\omega.t)}\vec{e}_y}$$

Direction de propagation suivant l'axe OX (vers les x croissants):

$$\vec{B} = \frac{(\vec{e}_x)\times\vec{E}}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c}\, e^{i(k.x-\omega.t)}\vec{e}_z}$$

2. Flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B}\bullet d\vec{S} = \iint_S B.dS$ ($\vec{B}$ est perpendiculaire à la surface)

$$\Phi = \frac{N.E_0}{c}.e^{-i\omega.t}\int_0^a\int_0^{f(x)} e^{ik.x}dydx$$

Où $f(x) = -\frac{b}{a}x + b = b\left(1-\frac{x}{a}\right)$ est l'équation de la droite coupant les axe (OX) et (OY) respectivement aux points (a,0) et (0,b).

$$\Phi = \frac{Nb.E_0}{c}.e^{-i\omega.t}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{ik.x}dx$$

L'intégration par partie donne : $\int_0^a x.e^{ik.x}dx = \frac{1}{ik}\left\{ae^{ika} - \frac{1}{ik}\left(e^{ika}-1\right)\right\}$

D'où $\Phi = \frac{Nb.E_0}{ic.k}e^{-i\omega.t}\left\{\left(e^{ika}-1\right) - e^{ika} + \frac{1}{ika}\left(e^{ika}-1\right)\right\}$

En utilisant $\omega = c.k$ et $e^{ika/2} - e^{-ika/2} = 2i.\sin(ka/2)$ on trouve

$$\Phi = \frac{Nb.E_0}{i\omega}e^{i.\left(\frac{ka}{2}-\omega.t\right)}\left\{2i.\sin\left(\frac{ka}{2}\right).\left(1+\frac{1}{ika}\right) - e^{ika}\right\}$$

Ou bien

$$\boxed{\Phi = \frac{Nb.E_0}{i\omega}e^{i.\left(\frac{ka}{2}-\omega.t\right)}\left\{-\cos\left(\frac{ka}{2}\right) + \left(i+\frac{2}{ka}\right).\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right\}}$$

3. Force électromotrice (théorème de FARADAY)

$$\boxed{\mathrm{e} = -\frac{d\Phi}{dt} = Nb.E_0 e^{i.\left(\frac{ka}{2}-\omega.t\right)}\left\{-\cos\left(\frac{ka}{2}\right) + \left(i+\frac{2}{ka}\right).\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right\}}$$

4. Force électromotrice efficace. $\boxed{\mathscr{E} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}.\mathrm{e}^*}{2}}}$

$$\mathrm{e} = Nb.E_0 e^{i.\left(\frac{ka}{2}-\omega.t\right)}\left\{-\cos\left(\frac{ka}{2}\right)+\left(i+\frac{2}{ka}\right).\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right\}$$

$$\mathrm{e}^* = Nb.E_0 e^{-i.\left(\frac{ka}{2}-\omega.t\right)}\left\{-\cos\left(\frac{ka}{2}\right)+\left(-i+\frac{2}{ka}\right).\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right\}$$

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{Nb.E_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\omega.a}{2c}\right)-\frac{2c}{\omega.a}\sin\left(\frac{\omega.a}{2c}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{\omega.a}{2c}\right)}}$$

5. Vecteur de POYTING $\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ dans le cas d'une onde plane $\vec{P} = \dfrac{E^2}{\mu_0.c}\vec{n}$ avec $B = \dfrac{E}{c}$

Donc $P = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}\cos^2(kx-\omega t)$ et la valeur moyenne $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0.c}$ ($\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle = \dfrac{1}{2}$)

D'où $\mathscr{P} = \langle P\rangle.S = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0.c}4\pi.d^2 \Rightarrow$ $\boxed{E_0 = \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}2c.\mathscr{P}}}$

6. $a = \dfrac{\lambda}{4} \Rightarrow \dfrac{ka}{2} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(\dfrac{ka}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{ka}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathscr{E} = \dfrac{Nb.E_0}{2}\sqrt{\left(1-\dfrac{4}{\pi}\right)^2+1}$ et $\boxed{\mathscr{E} = 0{,}518\dfrac{Nb}{d}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}2c.\mathscr{P}}}$

A.N. : $\boxed{\mathscr{E} = 57{,}1.mV}$