FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

UNITÉ : ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (04 *points*)

1. $\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$

2. Théorème de STOCKES : $\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \bullet d\vec{S}$ et $\sum I_{\text{int}} = \mu_0 . \iint_S \vec{j} \bullet d\vec{S}$

Donc $\iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \bullet d\vec{S} = \mu_0 . \iint_S \vec{j} \bullet d\vec{S}$

Cette dernière équation étant valable quelque soit la surface S s'appuyant sur C. On trouve alors la forme locale de la loi d'AMPERE. $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j}}$

3. $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} \quad \Rightarrow \quad div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 . div(\vec{j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad div(\vec{j}) = 0$

D'où le théorème d'AMPERE n'est valable qu'en régime permanent.

4. Calculons $\vec{j}_D$. $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 . \vec{j}_D$

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 . div(\vec{j}) + \mu_0 . div(\vec{j}_D) = \mu_0 . \left(div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

Donc $div(\vec{j}_D) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Or en utilisant la forme locale du théorème de GAUSS. $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

On trouve finalement $\boxed{\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

5. En remplaçant dans l'équation d'AMPERE $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 . \varepsilon_0 . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

<u>EXERCICE 02 :</u> (06 *points*)

1. $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

2. $V' = V - \dfrac{\partial f}{\partial t}$ et $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$ donc $V = V' + \dfrac{\partial f}{\partial t}$ et $\vec{A} = \vec{A}' - \overrightarrow{grad}(f)$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\left(V' + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' - \overrightarrow{grad}(f)\right) = -\overrightarrow{grad}(V') - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(f) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(f)$$

Alors $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V') - \dfrac{\partial \vec{A}'}{\partial t}}$

Et $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}' - \overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}') - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}')}$

3. Jauge de LORENTZ $\boxed{div(\vec{A}) + \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = 0}$ avec $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ et $V(\infty) = 0$

4. $div(\vec{E}) = div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\Delta V - \dfrac{\partial div(\vec{A})}{\partial t} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A}) = -\mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t}$ donc $\boxed{\Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$ or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A}) = -\mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t}$

Donc $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

D'où $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$

5. ($\rho = 0$) et ($\vec{j} = \vec{0}$) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$ et $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

<u>EXERCICE 03 :</u> (10 *points*)

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(k.x-\omega.t)\vec{e}_y - E_0.\sin(k.x-\omega.t)\vec{e}_z$$
$$\vec{E}_1 = E_0.\cos(k.x-\omega.t)\vec{e}_y + E_0.\cos\left(k.x-\omega.t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_z$$

1. Notation complexe : $\vec{\mathscr{E}}_1 = E_0.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_y + e^{i\pi/2}\vec{e}_z\right)$

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}_1 = E_0.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_y + i.\vec{e}_z\right)}$$

2. Polarisation : $\boxed{\varphi = \varphi_z - \varphi_y = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{E_{0z} = E_{0y} = E_0}$ <u>*polarisation circulaire gauche*</u>.

3. Champ magnétique : Direction de propagation $\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}_1}{c}$

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}.\cos(k.x-\omega.t)\vec{e}_z - \frac{E_0}{c}.\cos\left(k.x-\omega.t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y$$
$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}.\sin(k.x-\omega.t)\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}.\cos(k.x-\omega.t)\vec{e}_z}$$

En notation complexe : $\boxed{\vec{\mathscr{B}}_1 = \frac{E_0}{c}.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_z - i.\vec{e}_y\right)}$

4. Potentiel vecteur : $\vec{B}_1 = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}_1\right)$ en notation complexe $\boxed{\vec{\mathscr{B}}_1 = \vec{\nabla}\times\vec{\mathscr{A}}_1 = i\vec{k}\times\vec{\mathscr{A}}_1}$

Posons $\vec{\mathscr{A}}_1 = \left(A_{0x}.e^{i\varphi_x}.\vec{e}_x + A_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + A_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z\right)e^{i(k.x-\omega.t)} = \left(A_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + A_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z\right)e^{i(k.x-\omega.t)}$ transversale.

Donc $\vec{\mathscr{B}}_1 = i\vec{k}\times\vec{\mathscr{A}}_1 = ik.\vec{e}_x \times \left(A_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + A_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z\right)e^{i(k.x-\omega.t)}$ avec $\vec{k} = ik.\vec{e}_x$

D'où $\frac{E_0}{k.c}.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_z - i.\vec{e}_y\right) = i.\left(A_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_z - A_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_y\right)e^{i(k.x-\omega.t)}$

En comparant : $\begin{cases} i.A_{0y}.e^{i\varphi_y} = E_0/k.c \\ A_{0z}.e^{i\varphi_z} = E_0/k.c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{0y} = E_0/k.c \\ A_{0z} = E_0/k.c \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi_y = -\pi/2 \\ \varphi_z = 0 \end{cases}$

En remplaçant dans $\vec{\mathscr{A}}_1$ et en posant $k.c = \omega$ on trouve :

$$\boxed{\vec{\mathscr{A}}_1 = \frac{E_0}{\omega}.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_z - i.\vec{e}_y\right)}$$

En prenant la partie réelle : $\boxed{\vec{A}_1 = \frac{E_0}{\omega}.\sin(k.x-\omega.t)\vec{e}_y + \frac{E_0}{\omega}.\cos(k.x-\omega.t)\vec{e}_z}$

5. $\vec{P}_1 = \frac{\vec{E}_1\times\vec{B}_1}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P} = \frac{E_1^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x$ ($B_1 = \frac{E_1}{c}$)

Donc $\vec{P}_1 = \frac{E_0^2.\left[\cos^2(k..x-\omega t) + \sin^2(k..x-\omega t)\right]}{\mu_0.c}\vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\vec{P}_1 = \frac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x}$ constant.

6. $\vec{E}_1(x=0)+\vec{E}_2(x=0)=\vec{0}$ et $\vec{E}_2(x,t)$ est une OEPPM qui se propage vers les x négatifs.

Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x,t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y}.\cos(k.x+\omega.t+\varphi_y)\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(k.x+\omega.t+\varphi_z)\vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0.\cos(-\omega.t)\vec{e}_y - E_0.\cos\left(-\omega.t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_z = E_{0y}.\cos(+\omega.t+\varphi_y)\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(+\omega.t+\varphi_z)\vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y}.\cos(\omega.t+\varphi_y) = -E_0.\cos(\omega.t) \\ E_{0z}.\cos(\omega.t+\varphi_z) = -E_0.\cos\left(\omega.t-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = -\pi/2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -E_0.\cos(k.x+\omega.t).\vec{e}_y - E_0.\cos\left(k.x+\omega.t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z}$$

Et en notation complexe :

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}_2 = E_0.e^{i(k.x+\omega.t)}(\vec{e}_y - i.\vec{e}_z)}$$

7. Polarisation : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{E_{0z} = E_{0y} = E_0}$

<u>*polarisation circulaire gauche*</u>.

8. Champ magnétique : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{-\vec{e}_x \times \vec{E}_2}{c}$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}.\cos(k.x+\omega.t)\vec{e}_z - \frac{E_0}{c}.\cos\left(k.x+\omega.t-\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c}.\sin(k.x+\omega.t)\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}.\cos(k.x+\omega.t)\vec{e}_z}$$

En notation complexe : $\boxed{\vec{\mathscr{B}}_2 = \frac{E_0}{c}.e^{i(k.x+\omega.t)}(\vec{e}_z + i.\vec{e}_y)}$

9.
$$\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_1 + \vec{\mathscr{E}}_2 = E_0.e^{ik.x}\left[(e^{-i\omega.t} - e^{i\omega.t})\vec{e}_y + i.(e^{-i\omega.t} + e^{i\omega.t})\vec{e}_z\right]$$

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}} = 2i.E_0.e^{ik.x}\left[-\sin(\omega.t).\vec{e}_y + \cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{E} = -2E_0.\sin(k.x)\left[-\sin(\omega.t).\vec{e}_y + \cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0.\left[\sin(k.x).\sin(\omega.t).\vec{e}_y - \sin(k.x).\cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]}$$

$$\vec{\mathscr{B}} = \vec{\mathscr{B}}_1 + \vec{\mathscr{B}}_2 = \frac{E_0}{c}.e^{ik.x}\left[(e^{-i\omega.t} + e^{i\omega.t})\vec{e}_z + i.(e^{-i\omega.t} - e^{i\omega.t})\vec{e}_y\right]$$

$$\boxed{\vec{\mathscr{B}} = 2\frac{E_0}{c}.e^{ik.x}\left[\cos(\omega.t).\vec{e}_z - \sin(\omega.t).\vec{e}_y\right]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}.\left[-\cos(k.x).\sin(\omega.t).\vec{e}_y + \cos(k.x).\cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]}$$

10. Vecteur de Poynting : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{4E_0^2}{c}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \sin(k.x).\sin(\omega.t) & -\sin(k.x).\cos(\omega.t) \\ 0 & -\cos(k.x).\sin(\omega.t) & \cos(k.x).\cos(\omega.t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = \vec{0}}$$

11. Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.