FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

UNITÉ : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01 : (08 *points*)

1. Forme Intégrale du théorème d'Ampère : $\boxed{\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}}$.

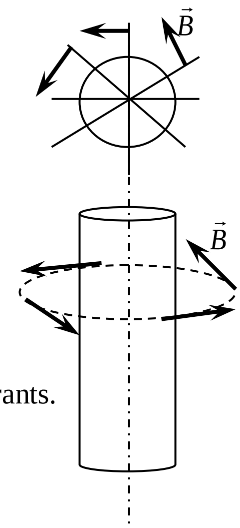
   Forme locale du théorème d'Ampère : $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0 . \vec{j}}$.

2. $\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0 . \vec{j} \quad \Rightarrow \quad div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right) = \mu_0 . div\left(\vec{j}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad div\left(\vec{j}\right) = 0$

   Or d'après l'équation de continuité $div\left(\vec{j}\right) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

   En régime stationnaire $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\left(\vec{j}\right) = 0$.

   D'où le théorème d'AMPERE n'est valable qu'en régime permanent.



3. Cylindre traversé par une densité volumique de courant $\vec{j}$.

   Symétrie du champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de symétrie des courants.
   Tout plan passant par l'axe du cylindre est un plan de symétrie.
   D'où la symétrie de $\vec{B}$ est une symétrie cylindrique : $\boxed{\vec{B} = B.\vec{e}_\varphi}$.

   Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit une boucle fermée en forme de cercle de rayon r centrée sur l'axe du cylindre et contenue dans plan perpendiculaire au cylindre.

   $\vec{B} \,//\, d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \bullet d\vec{r} = B.dr$ et $B = \text{C}^{\text{te}}$ sur le cercle (par symétrie de rotation).

   Donc le théorème d'Ampère devient dans ce cas :

   $$\oint \vec{B} \bullet d\vec{r} = B.2\pi.r = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$$

   Calculons les courants intérieurs à la boucle.

   <u>Zone 1 : Intérieur du cylindre $0 \le r \le R$.</u>

   $\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{S} = j.S = j.\pi.r^2$ (*j* est constant et perpendiculaire à la section du cylindre).

   Donc $\boxed{B_{\text{int}} = \dfrac{\mu_0 j}{2} r}$ et $\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \dfrac{\mu_0 j}{2} r.\vec{e}_\varphi}$.

   <u>Zone 2 : Extérieur du cylindre $R \le r < +\infty$.</u>

   $\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{S} = j.S = j.\pi.R^2$ (*j* est constant et perpendiculaire à la section du cylindre).

   Donc $\boxed{B_{ext} = \dfrac{\mu_0 j.R^2}{2} \dfrac{1}{r}}$ et $\boxed{\vec{B}_{ext} = \dfrac{\mu_0 j.R^2}{2} \dfrac{1}{r}.\vec{e}_\varphi}$.

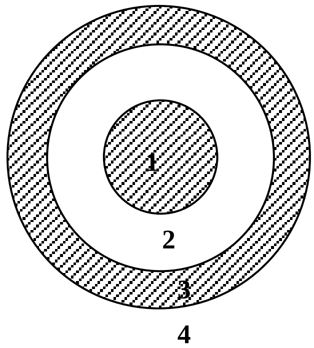
4. La symétrie cylindrique étant la même que dans la question 3. ($\vec{B}$ perpendiculaire au plan de symétrie qui passe par l'axe du cylindre), donc :

   $$\boxed{\vec{B} = B.\vec{e}_\varphi}$$

5. Pour appliquer le théorème d'Ampère, on choisit une boucle fermée en forme de cercle de rayon r centrée sur l'axe du cylindre et contenue dans plan perpendiculaire au cylindre.

Et le théorème d'Ampère devient : $\oint \vec{B} \bullet d\vec{r} = B.2\pi.r = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$

Calculons les courants intérieurs à la boucle.



Zone 1 : $0 \le r \le R_1$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S = j.\pi.r^2$ (*j* est constant et perpendiculaire à la section du cylindre).

Donc $\boxed{B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r}$ et $\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r.\vec{e}_\varphi}$.

Zone 2 : $R_1 \le r \le R_2$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S_1 = j.\pi.R_1^2$

Donc $\boxed{B_2 = \frac{\mu_0 j.R_1^2}{2} \frac{1}{r}}$ et $\boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j.R_1^2}{2} \frac{1}{r}.\vec{e}_\varphi}$.

Zone 3 : $R_2 \le r \le R_3$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S_1 + j_2 S = j.\pi.R_1^2 - j\left(\pi.r^2 - \pi.R_2^2\right)$

Donc $\boxed{B_3 = \frac{\mu_0 j}{2}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{r} - r\right)}$ et $\boxed{\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 j}{2}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{r} - r\right).\vec{e}_\varphi}$.

Zone 4 : $R_3 \le r < +\infty$.

$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \bullet d\vec{S} = j_1.S_1 + j_2 S_2 = j.\pi.R_1^2 - j\left(\pi.R_3^2 - \pi.R_2^2\right)$

Donc $\boxed{B_4 = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}{r}}$ et $\boxed{\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}{r} \vec{e}_\varphi}$.

EXERCICE 02 : (12 *points*)

1. Equations de Maxwell en absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$$\boxed{div\left(\vec{E}\right)=0}\ ;\ \boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}\ ;\ \boxed{div\left(\vec{B}\right)=0}\ ;\ \boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

2. Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=-\frac{\partial\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)}{\partial t}=-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right)-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$ ($div\left(\vec{E}\right)=0$)

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)}{\partial t}=-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{B}\right)\right)-\Delta\vec{B}=-\Delta\vec{B}$ ($div\left(\vec{B}\right)=0$)

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{B}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

3. Onde électromagnétique plane progressive et monochromatique se propage dans le vide dépourvus de charges et de courants suivant la direction $\vec{e}_x$

$$\vec{E}_1=E_{0y}.\cos\left(k.x-\omega.t+\varphi_y\right)\vec{e}_y+E_{0z}.\cos\left(k.x-\omega.t+\varphi_z\right)\vec{e}_z$$

Polarisation circulaire gauche $\Rightarrow$ $E_{0y}=E_{0z}=E_0$ et $\varphi_z-\varphi_y=\pi/2$ donc $\left(\varphi_z=\pi/2,\varphi_y=0\right)$.

Notation réelle : $\boxed{\vec{E}_1=E_0.\cos\left(k.x-\omega.t\right)\vec{e}_y+E_0.\cos\left(k.x-\omega.t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_z}$

Notation complexe : $\vec{\mathscr{E}}_1=E_0.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_y+e^{i\pi/2}\vec{e}_z\right)$

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}_1=E_0.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(\vec{e}_y+i.\vec{e}_z\right)}$$

4. Champ magnétique : Direction de propagation $\vec{e}_x$ $\Rightarrow$ $\vec{B}_1=\frac{\vec{e}_x\times\vec{E}_1}{c}$

$$\boxed{\vec{B}_1=\frac{E_0}{c}.\cos\left(k.x-\omega.t\right)\vec{e}_z-\frac{E_0}{c}.\cos\left(k.x-\omega.t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y}$$

$$\boxed{\vec{B}_1=\frac{E_0}{c}.\sin\left(k.x-\omega.t\right)\vec{e}_y+\frac{E_0}{c}.\cos\left(k.x-\omega.t\right)\vec{e}_z}$$

En notation complexe : $\boxed{\vec{\mathscr{B}}_1=\frac{E_0}{c}.e^{i(k.x-\omega.t)}\left(-i.\vec{e}_y+\vec{e}_z\right)}$

5. $\vec{P}_1=\frac{\vec{E}_1\times\vec{B}_1}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P}=\frac{E_1^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x$ ($B_1=\frac{E_1}{c}$)

Donc $\vec{P}_1=\frac{E_0^2.\left[\cos^2\left(k..x-\omega t\right)+\sin^2\left(k..x-\omega t\right)\right]}{\mu_0.c}\vec{e}_x$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{P}_1=\frac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x}$ constant.

6. $\vec{E}_1(x=0)+\vec{E}_2(x=0)=\vec{0}$ et $\vec{E}_2(x,t)$ est une *OEPPM* qui se propage vers les x négatifs.

Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x,t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y}.\cos(k.x+\omega.t+\varphi_y).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(k.x+\omega.t+\varphi_z).\vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0.\cos(-\omega.t)\vec{e}_y - E_0.\cos\left(-\omega.t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_z = E_{0y}.\cos(+\omega.t+\varphi_y).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(+\omega.t+\varphi_z).\vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y}.\cos(\omega.t+\varphi_y) = -E_0.\cos(\omega.t) \\ E_{0z}.\cos(\omega.t+\varphi_z) = -E_0.\cos\left(\omega.t-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = -\pi/2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -E_0.\cos(k.x+\omega.t).\vec{e}_y - E_0.\cos\left(k.x+\omega.t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z}$$

Et en notation complexe :

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}}_2 = E_0.e^{i(k.x+\omega.t)}\left(\vec{e}_y - i.\vec{e}_z\right)}$$

7. Polarisation : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{E_{0z} = E_{0y} = E_0}$

   <u>polarisation circulaire gauche</u>.

8. Champ magnétique : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_2 = \dfrac{-\vec{e}_x \times \vec{E}_2}{c}$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}.\cos(k.x+\omega.t)\vec{e}_z - \frac{E_0}{c}.\cos\left(k.x+\omega.t-\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c}.\sin(k.x+\omega.t)\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}.\cos(k.x+\omega.t)\vec{e}_z}$$

En notation complexe : $\boxed{\vec{\mathscr{B}}_2 = \dfrac{E_0}{c}.e^{i(k.x+\omega.t)}\left(i.\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)}$

9.

$$\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_1 + \vec{\mathscr{E}}_2 = E_0.e^{ik.x}\left[\left(e^{-i\omega.t} - e^{i\omega.t}\right)\vec{e}_y + i.\left(e^{-i\omega.t} + e^{i\omega.t}\right)\vec{e}_z\right]$$

$$\boxed{\vec{\mathscr{E}} = 2i.E_0.e^{ik.x}\left[-\sin(\omega.t).\vec{e}_y + \cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{E} = -2E_0.\sin(k.x)\left[-\sin(\omega.t).\vec{e}_y + \cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0.\left[\sin(k.x).\sin(\omega.t).\vec{e}_y - \sin(k.x).\cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]}$$

$$\vec{\mathscr{B}} = \vec{\mathscr{B}}_1 + \vec{\mathscr{B}}_2 = \frac{E_0}{c}.e^{ik.x}\left[\left(e^{-i\omega.t} + e^{i\omega.t}\right)\vec{e}_z + i.\left(e^{-i\omega.t} - e^{i\omega.t}\right)\vec{e}_y\right]$$

$$\boxed{\vec{\mathscr{B}} = 2\frac{E_0}{c}.e^{ik.x}\left[\cos(\omega.t).\vec{e}_z - \sin(\omega.t).\vec{e}_y\right]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}.\left[-\cos(k.x).\sin(\omega.t).\vec{e}_y + \cos(k.x).\cos(\omega.t).\vec{e}_z\right]}$$

10. Vecteur de Poynting : $\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \frac{4E_0^2}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \sin(k.x).\sin(\omega.t) & -\sin(k.x).\cos(\omega.t) \\ 0 & -\cos(k.x).\sin(\omega.t) & \cos(k.x).\cos(\omega.t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = \vec{0}}$$

Conclusion : Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.