FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

UNITÉ : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

QUESTIONS DE COURS : (06 *points*)

1. $\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B}) = 0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

2. $div(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = 0 = \mu_0.div(\vec{j}) + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial}{\partial t}div(\vec{E})$ et puisque $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ alors :

$\mu_0.div(\vec{j}) + \mu_0.\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ c.q.f.d.

3. En absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$\boxed{div(\vec{E}) = 0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B}) = 0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

4. Calculons $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{E})) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$ ($div(\vec{E}) = 0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Calculons $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{B})) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ ($div(\vec{B}) = 0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{B} - \mu_0.\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

5. $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

EXERCICE 01 : (07 *points*)

1. Champ crée par un courant droit infini :

Utilison la relation $\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon d.(Figure 1)

Et $\left| d\vec{l} \times \vec{r} \right| = dl.r.\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = dl.r.\cos\theta$

Paramétrisation $\begin{cases} dl = \frac{d}{\cos^2\theta} d\theta \\ r = \frac{d}{\cos\theta} \end{cases}$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale $B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta . d\theta$

Enfin $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}}$

En coordonnées cylindriques $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d} \vec{e}_\varphi}$

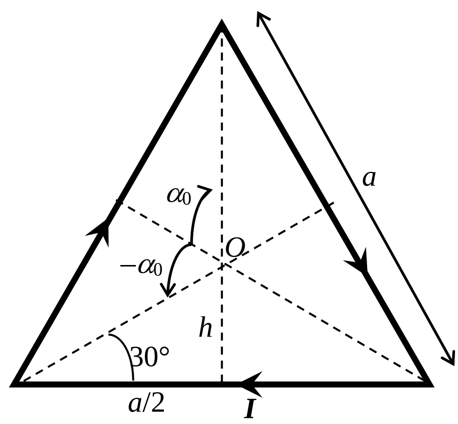

Figure 2.

2. Champ crée par la spire triangulaire :

Calculons la distance h entre le milieu des segments et le point O.

$$tg(30) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{a/2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Pour calculer le champ crée par un segment de droite on fait le même paramétrage que dans la question précédente.

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \oint_L \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . d} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos\theta . d\theta$$

L'angle α_0 est dans le cas d'un triangle donné par $\alpha_0 = \pi/3$ (figure 2.).

D'où

$$B = \frac{\mu_0 . I}{2\pi . d} \sin\alpha_0 \qquad \text{avec} \qquad d = h = \frac{a}{2\sqrt{3}} .$$

Finalement, le champ crée par tout le triangle :

$$\boxed{B_{Tot} = 3.B = \frac{9\mu_0 . I}{2\pi . a}}$$

$\vec{B}_{Tot}$ est perpendiculaire à la surface du triangle. Son sens est donné par la Règle de la Main Droite appliquée au sens du courant.

3. Dans le cas d'un polygone régulier de N cotés. $\begin{cases} \alpha_0 = \pi/N \\ d = R \end{cases}$

Le champ magnétique crée par un seul ségment.

$$B = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_L \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0.I}{4\pi.d}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\cos\theta.d\theta = \frac{\mu_0.I}{2\pi.d}\sin\alpha_0$$

Le champ magnétique total.

$$\boxed{B_{Tot} = N.B = \frac{\mu_0.I}{2d}\left(\frac{N}{\pi}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

$\vec{B}_{Tot}$ est perpendiculaire à la surface du polygone. Son sens est donné par la Règle de la Main Droite appliquée au sens du courant.

4. Dans le cas où $N \to\infty$.

$$\lim_{lN\to\infty} B_{Tot} = \lim_{lN\to\infty}\left\{\frac{\mu_0.I}{2R}\left(\frac{N}{\pi}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right\} = \lim_{lx\to 0}\left\{\frac{\mu_0.I}{2R}\frac{\sin x}{x}\right\}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{lN\to\infty} B_{Tot} = \frac{\mu_0.I}{2R}}$$

C'est le champ magnétique crée par une spire circulaire dans son centre.

<u>EXERCICE 02 :</u> (07 *points*)

1. Pour une fonction d'onde en notation complexe de la forme

$$f(\vec{r},t) = A.e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega.t)} = A.e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega.t)}.$$

Avec $\vec{k} = k_x.\vec{e}_x + k_y.\vec{e}_y + k_z.\vec{e}_z$ et $\vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$.

Le gradient s'écrit

$$\overrightarrow{grad}\, f(\vec{r},t) = \vec{\nabla} f(\vec{r},t) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

D'où

$$\vec{\nabla} f(\vec{r},t) = A\left(\frac{\partial e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega.t)}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega.t)}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega.t)}}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{r},t) = i.k_x.f.\vec{e}_x + i.k_x.f.\vec{e}_y + i.k_x.f.\vec{e}_z = i\vec{k}.f(\vec{r},t)$$

Donc

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv i.\vec{k}}$$

Et la dérivée partielle par rapport au temps s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r},t) = A\frac{\partial e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega.t)}}{\partial t} = -i.\omega.f(\vec{r},t)$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i.\omega}$$

2. Equations de MAXWELL dans le vide (en absence de charges et de courants).

$$div(\vec{E}) = 0\ ;\ \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ;\ div(\vec{B}) = 0\ ;\ \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Comme

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla}\bullet\vec{E} = i.\vec{k}\bullet\vec{E} = 0$$

Donc $\vec{k}$ est perpendiculaire au champ électrique $\vec{E}$.

3. Comme $\vec{E}$ est suivant la direction de l'axe (OX), et puisque $\vec{k}$ est perpendiculaire à $\vec{E}$ et suivant la direction de propagation, donc, la direction de propagation de l'onde est parallèle au plan (YOZ).

4. Fréquence

$\lambda = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \dfrac{c}{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \dfrac{3\times 10^8}{4\pi} = 2{,}39\times 10^7\,Hz}$

Pulsation

$\boxed{\omega = 2\pi.\nu = 2\pi\dfrac{c}{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 1{,}5\times 10^8\,rad/s}$

5. Le champ électrique est toujours dirigé suivant la même direction (OX)

$$\vec{E} = E_0.e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega.t)}\vec{e}_x$$

La polarisation est rectiligne.

6. Comme le vecteur $\vec{k}$ est parallèle au plan (YOZ) alors $k_x = 0$ et :

$$\vec{k} = k_y.\vec{e}_y + k_z.\vec{e}_z$$

Son module est donné par la longueur d'onde

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}.m^{-1}}$$

D'où $\boxed{\begin{cases} k_y = k.\cos\theta \\ k_z = k.\sin\theta \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} k_y = \sqrt{3}/4 = 0{,}43 \\ k_z = 1/4 = 0{,}25 \end{cases}}$ et $\boxed{\vec{n} = \dfrac{\vec{k}}{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} n_y = \sqrt{3}/2 \\ n_z = 1/2 \end{cases}}$.

7. Champ magnétique : équation de structure du champ électromagnétique dans le vide.

$$\vec{n}\times\vec{E} = c.\vec{B}$$

D'où

$\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega.t)}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y + \dfrac{1}{2}\vec{e}_z\right)\times\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}e^{i(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega.t)}\left(\dfrac{1}{2}\vec{e}_y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z\right)}$

8. Equations de MAXWELL dans le vide (en absence de charges et de courants).

$$div(\vec{E}) = 0 \;;\; \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;;\; div(\vec{B}) = 0 \;;\; \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Jauge de LORENTZ.

$$div(\vec{A}) + \mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Comme $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Donc $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A} = -\mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$