FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

QUESTIONS DE COURS : (04 *points*)

1. Equations de MAXWELL dépendantes du temps.

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad ; \quad \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{div(\vec{B}) = 0} \quad ; \quad \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

2. En absence de charges $(\rho = 0)$ et de courants $(\vec{j} = \vec{0})$.

$$div(\vec{E}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad div(\vec{B}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equations de propagation :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'autre part : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ car $div(\vec{E}) = 0$

D'où

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

D'autre part : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{B})\right) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$ car $div(\vec{B}) = 0$

D'où

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

3. Relation entre champs et potentiels : $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

4. Conditions de jauge de LORENTZ. $\boxed{div(\vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$ avec $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ et $V(\infty) = 0$

5. Les équations de POISSON dépendantes du temps.

$$div(\vec{E}) = div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} div(\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$

Donc

$$\boxed{\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $\quad div(\vec{A}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$

Donc

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$$

D'autre part

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

D'où

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

En comparant ces deux équations, il vient que

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$$

<u>EXERCICE 01 :</u> (08 *points*)

1. **Lois de BIOT et SAVART.**

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}d\tau} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{j}}{r}d\tau}$$

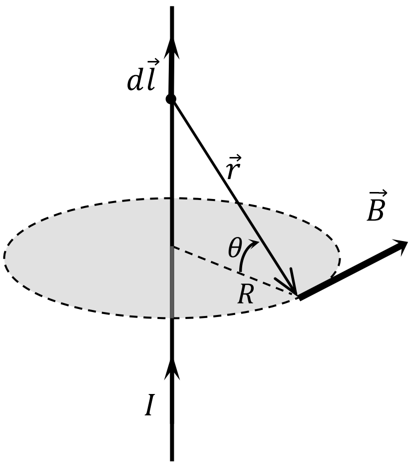
2. Cas de courants filiformes stationnaires I.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}}{r}}$$

3. Fil droit infini parcouru par un courant stationnaire I

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_L \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon R.(Figure 7.)



Et $\quad d\vec{l}\times\vec{r} = dl.r.\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = dl.r.\cos(\theta)$

Paramétrisation : $\quad dl = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta \quad$ et $\quad r = \frac{R}{\cos\theta}$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale

$$B = \frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0.I}{4\pi.R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,.d\theta$$

Enfin

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}}$$

En coordonnées cylindriques

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\vec{e}_\varphi}$$

4. En utilisant le théorème d'AMPERE.

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Symétrie du champ magnétique : symétrie cylindrique.
On choisit une courbe C de forme circulaire de rayon R perpendiculaire à la distribution de courants et centrée sur le fil conducteur est orienté dans le sens trigonométrique (Règle de la main droite appliquée au courant).

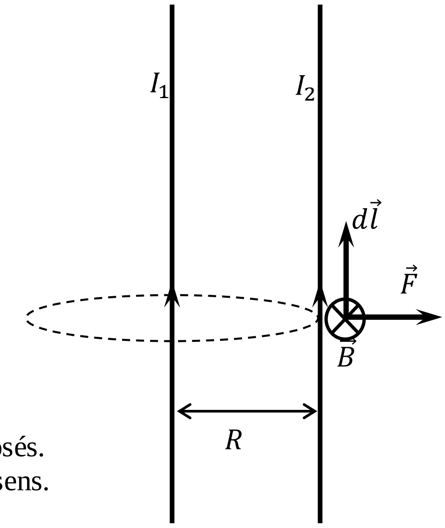
$$\vec{B} \parallel d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}\bullet d\vec{r} = B.dr$$

En utilisant la symétrie de rotation suivant l'axe du courant B est constant en module sur la courbe C. Donc :

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = B.L = B.2\pi R = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Comme $\sum I_{\text{int}} = I$. Alors :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}}$$



5. Force magnétique :

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right)$$

Comme $\vec{B} \perp d\vec{l}$ (voir figure). Donc :

$$dF = I.B.dl = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{R}dl$$

En intégrant sur une longueur unité ($L = 1$)

$$\boxed{F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{R}}$$

6. En utilisant la règle de la main droite (voir figure):

- La force est attractive si les deux courants sont dans sens opposés.
- La force est répulsive si les deux courants sont dans le même sens.

EXERCICE 02 : (08 *points*)

1. Notation réelle : polarisation circulaire $\left(E_{0y} = E_{0z} = E_0\right)$ gauche $\varphi_z - \varphi_y = \pi/2$

$$\boxed{\vec{E}_1 = E_0.\cos(kx - \omega t).\vec{e}_y + E_0.\cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z}$$

Ou

$$\boxed{\vec{E}_1 = E_0.\cos(kx - \omega t).\vec{e}_y - E_0.\sin(kx - \omega t).\vec{e}_z}$$

Notation complexe

$$\boxed{\vec{E}_1 = E_0.e^{i(kx-\omega t)}\left(\vec{e}_y + e^{i\pi/2}.\vec{e}_z\right) = E_0.e^{i(kx-\omega t)}\left(\vec{e}_y + i.\vec{e}_z\right)}$$

2. Champ magnétique : Direction de propagation $\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}_1}{c}$

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t).\vec{e}_z - \frac{E_0}{c}\cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_y$$

Notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}\sin(kx - \omega t).\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t).\vec{e}_z}$$

Notation complexe

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c}e^{i(kx-\omega t)}\left(\vec{e}_z - i.\vec{e}_y\right)}$$

3. $\vec{P}_1 = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_1}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P}_1 = \frac{E_1^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x$ $\left(B_1 = \frac{E_1}{c}\right)$. Donc :

$$\boxed{\vec{P}_1 = \frac{E_0^2.\left(\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)\right)}{\mu_0.c}\vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_x = \text{Constante}}$$

4. $\vec{E}_1(x=0) + \vec{E}_2(x=0) = \vec{0}$ et $\vec{E}_2(x,t)$ est une OEPPM qui se propage vers les x négatifs. Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x,t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y}.\cos\left(kx + \omega t + \varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(kx + \omega t + \varphi_z).\vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0.\cos(-\omega t).\vec{e}_y - E_0.\cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_z = E_{0y}.\cos\left(\omega t + \varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos(\omega t + \varphi_z).\vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y}.\cos\left(\omega t + \varphi_y\right) = -E_0.\cos(\omega t) \\ E_{0z}.\cos(\omega t + \varphi_z) = -E_0.\cos(\omega t - \pi/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = -\pi/2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -E_0.\cos(kx + \omega t).\vec{e}_y - E_0.\cos(kx + \omega t - \pi/2).\vec{e}_z}$$

Et en notation complexe :

$$\boxed{\vec{E}_2 = -E_0.e^{i(kx+\omega t)}\left(\vec{e}_y - i.\vec{e}_z\right)}$$

5. Polarisation : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \varphi_y - \varphi_z = \pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z}$
polarisation circulaire gauche.

6. Champ magnétique : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{-\vec{e}_x \times \vec{E}_2}{c}$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}\cos(kx+\omega t).\vec{e}_z - \frac{E_0}{c}\cos\left(kx+\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_y$$

Notation réelle

$$\boxed{\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c}\sin(kx+\omega t).\vec{e}_y + \frac{E_0}{c}\cos(kx+\omega t).\vec{e}_z}$$

Notation complexe

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}e^{i(kx+\omega t)}\left(\vec{e}_z + i.\vec{e}_y\right)}$$

7. Champ total en notation complexe

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0.e^{ikx}\left[\left(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}\right).\vec{e}_y + i.\left(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}\right).\vec{e}_z\right]$$

Donc

$$\boxed{\vec{E} = 2i.E_0.e^{ikx}\left[-\sin(\omega t).\vec{e}_y + \cos(\omega t).\vec{e}_z\right]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{E} = 2.E_0.\sin(kx)\left[\sin(\omega t).\vec{e}_y - \cos(\omega t).\vec{e}_z\right]}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}e^{ikx}\left[\left(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}\right).\vec{e}_z - i.\left(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}\right).\vec{e}_y\right]$$

Donc

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}e^{ikx}\left[\sin(\omega t).\vec{e}_y + \cos(\omega t).\vec{e}_z\right]}$$

En prenant la partie réelle :

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\cos(kx)\left[\sin(\omega t).\vec{e}_y + \cos(\omega t).\vec{e}_z\right]}$$

8. Nature de l'onde : <u>*Onde stationnaire*</u>.

9. Vecteur de Poynting : $\vec{P} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{E}\times\vec{B} = 4\frac{E_0^2}{c}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \sin(kx).\sin(\omega t) & -\sin(kx)\cos(\omega t) \\ 0 & \cos(kx).\sin(\omega t) & \cos(kx)\cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

D'où

$$\boxed{\vec{P} = 2\frac{E_0^2}{\mu_0.c}\sin(2kx).\sin(2\omega t)\,\vec{e}_x}$$

Conclusion : $\langle P\rangle_T = 0$ <u>*Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie*</u>.