CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01: (06 *points*)

1. Direction du champ magnétique (*En utilisant la symétrie*).

Plans de symétrie de la distribution de courants :
- (OXY) est un plan de symétrie.
- Tous les plans parallèles au plan (OXZ) sont des plans de symétrie.

Puisque le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie doit être perpendiculaire au plan de symétrie, alors le champ magnétique en tout point de l'espace est parallèle à l'axe (OY).

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_y(x,y,z).\vec{e}_y$$

Et puisque le champ magnétique est nul en un point par où passe plus d'un plan de symétrie, alors le champ magnétique est nul sur tout le plan (OXY).

$$\vec{B}(x,y,z=0) = \vec{0}$$

2. *En utilisant la symétrie*

- La distribution de courant est invariante par translation suivant l'axe (OX), d'où, le champ magnétique est indépendant de la variable x.
- La distribution de courant est invariante par translation suivant l'axe (OY), d'où, le champ magnétique est indépendant de la variable y.

Donc le champ ne dépend que de z : $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(z) = B_y(z).\vec{e}_y$

(OXY) étant un plan de symétrie et $\vec{B}$ ayant la symétrie d'un pseudo vecteur, alors : $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$

3. Théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Nous devons choisir une boucle qui respecte la symétrie du champ.

Puisque la symétrie du champ est plane $\left(\vec{B} \parallel \vec{e}_y\right)$ La boucle que nous choisissons pour calculer la circulation est une boucle rectangulaire dans le plan (OYZ) dont deux côtés sont parallèles à l'axe (OY) $(l_1 = l_3 = l)$ et deux côtés parallèles à l'axe (OZ) $(l_2 = l_4 = h)$.

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{B}_1\bullet d\vec{r}_1 + \int_{l_2} \vec{B}_2\bullet d\vec{r}_2 + \int_{l_3} \vec{B}_3\bullet d\vec{r}_3 + \int_{l_4} \vec{B}_4\bullet d\vec{r}_4$$

Comme

$$\vec{B}_2 \perp d\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_4 \perp d\vec{r}_4 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{l_2} \vec{B}_2\bullet d\vec{r}_2 = \int_{l_4} \vec{B}_4\bullet d\vec{r}_4 = 0$$

Et

$$\vec{B}_1 \parallel d\vec{r}_1 \ \ (\text{même sens}) \quad \Rightarrow \quad \int_{l_1} \vec{B}_1\bullet d\vec{r}_1 = \int_{l_1} B_1\bullet dr_1$$

$$\vec{B}_3 \parallel d\vec{r}_3 \ \ (\text{sens opposés}) \quad \Rightarrow \quad \int_{l_3} \vec{B}_3\bullet d\vec{r}_3 = -\int_{l_3} B_3\bullet dr_3$$

D'où

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_{l_1} B_1.dr_1 - \int_{l_3} B_3.dr_3$$

En plus, si nous utilisons la symétrie de translation le long de l'axe (OY) :
$\vec{B}_1$ est constant sur l_1 $(B_1 = \text{constante})$ et $\vec{B}_3$ est constant sur l_3 $(B_3 = \text{constante})$. Donc

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = B_1\int_{l_1} dr_1 - B_3\int_{l_3} dr_3 = (B_1 - B_3).l$$

D'où le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = (B_1 - B_3).l = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Nous plaçons la boucle à l'extérieur de la couche de courant.

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (B_1 - B_3).l = 0 \quad \text{donc} \quad B_1 = B_3 \quad \text{et} \quad \boxed{B_{\text{ext}} = \text{constante}}$$

4. Champ magnétique en tout point de l'espace (intérieur et extérieur de la couche).

Nous plaçons la boucle dans le plan (OYZ) et le milieu de la boucle au point d'origine O (la boucle est symétrique par rapport au plan (OXY), dans ce cas $h = 2z$).

A l'intérieur de la couche de courant :

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}\bullet d\vec{s} = -j.S = -j.l.2z$$

Comme $B(-z) = -B(z)$ et B_1 et B_3 sont symétriques, donc : $B_1 = -B_3$
Il vient que

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = (B_1 - B_3).l = 2B_1.l = -j.l.2z$$

D'où

$$\boxed{B(z) = -j.z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(z) = -j.z.\vec{e}_y}$$

A l'extérieur de la couche de courant :

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}\bullet d\vec{s} = -j.S = -j.l.2(e/2)$$

Comme $B(-z) = -B(z)$ et B_1 et B_3 sont symétriques, donc : $B_1 = -B_3$
Il vient que

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = (B_1 - B_3).l = 2B_1.l = -j.l.e$$

D'où

$$\boxed{B(z) = \mp\frac{j.e}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(z) = \mp\frac{j.e}{2}\,\vec{e}_y} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{B}(z) = -\frac{|z|}{z}\frac{j.e}{2}\,\vec{e}_y}$$

EXERCICE 02: (10 *points*)

$$\vec{E}_1 = E_0.\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).\vec{e}_z$$

1. Champ électrique $\vec{E}_1$ en notation complexe.

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_1 = E_0.\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)\right].\vec{e}_z}$$

2. Vecteur unitaire $\vec{n}_1$ dans la direction de propagation.

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{k}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{e}_y\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)}$$

3. Polarisation : Rectiligne suivant l'axe $\vec{e}_z$.

4. La direction de propagation étant perpendiculaire à la direction de polarisation $(\vec{n}_1 \bullet \vec{e}_z = 0)$, l'onde est donc *transversale*.

5. Champ magnétique.

Equation de structure $\vec{n}_1 \times \vec{E}_1 = c.\vec{B}_1$

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{E}_1}{c} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right) \times \vec{e}_z$$

D'où

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y\right)}$$

Et en notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)\right].\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y\right)}$$

6. OEPPM $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$.

$$\boxed{\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_x - \vec{e}_y\right)}$$

Le champ électrique en notation réelle.

$$\vec{E}_2 = E_0.\cos\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_2 = E_0.\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y + \omega t\right).\vec{e}_z}$$

Le champ électrique en notation complexe.

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_2 = E_0.\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y + \omega t\right)\right].\vec{e}_z}$$

Le champ magnétique en notation réelle : relation de structure $\vec{n}_2 \times \vec{E}_2 = c.\vec{B}_2$

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{n}_2 \times \vec{E}_2}{c} = -\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y + \omega t\right).\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right) \times \vec{e}_z$$

D'où

$$\boxed{\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{\sqrt{2}.c}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y + \omega t\right).\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y\right)}$$

Et en notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}_2} = -\frac{E_0}{\sqrt{2}.c}\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y + \omega t\right)\right].(\vec{e}_x - \vec{e}_y)}$$

7. La résultante $(\vec{E}, \vec{B})$.

Champ électrique en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_1} + \underline{\vec{E}_2} = E_0.e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x+\frac{k}{\sqrt{2}}y-\omega t\right)}.\vec{e}_z + E_0.e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x+\frac{k}{\sqrt{2}}y+\omega t\right)}.\vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}} = E_0.e^{i\frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)}\{e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}\}.\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{E}} = 2E_0.e^{i\frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)}\cos(\omega t).\vec{e}_z}$$

Champ électrique en notation réelle

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0.\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)\right).\cos(\omega t).\vec{e}_z}$$

Champ magnétique en notation complexe

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_1} + \underline{\vec{B}_2} = \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x+\frac{k}{\sqrt{2}}y-\omega t\right)}.(\vec{e}_x - \vec{e}_y) - \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x+\frac{k}{\sqrt{2}}y+\omega t\right)}.(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}e^{i\frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)}\{e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}\}.(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{B}} = -\frac{i\sqrt{2}.E_0}{c}e^{i\frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)}\sin(\omega t).(\vec{e}_x - \vec{e}_y)}$$

Champ magnétique en notation réelle

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\sqrt{2}.E_0}{c}.\sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)\right).\sin(\omega t).(\vec{e}_x - \vec{e}_y)}$$

8. La nature de l'onde : *Onde stationnaire*.

Amplitudes des champs.

$$\boxed{E_m = 2E_0.\cos\left(k(x+y)/\sqrt{2}\right)} \quad ; \quad \boxed{B_m = \frac{\sqrt{2}.E_0}{c}.\sin\left(k(x+y)/\sqrt{2}\right)}$$

Plans nodaux de $\vec{E}$:

$$\cos\left(k(x+y)/\sqrt{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(x+y)/\sqrt{2} = (2n+1)\pi \quad \text{et} \quad \boxed{x + y = (2n+1)\,\frac{\lambda\sqrt{2}}{4}}$$

Plans ventraux de $\vec{E}$:

$$\cos\left(k(x+y)/\sqrt{2}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad k(x+y)/\sqrt{2} = n\pi \quad \text{et} \quad \boxed{x + y = 2n\,\frac{\lambda\sqrt{2}}{4}}$$

Plans nodaux de $\vec{B}$:

$$\sin\left(k(x+y)/\sqrt{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(x+y)/\sqrt{2} = n\pi \quad \text{et} \quad \boxed{\boxed{x + y = 2n\,\frac{\lambda\sqrt{2}}{4}}}$$

Plans ventraux de $\vec{B}$:

$$\sin\left(k(x+y)/\sqrt{2}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad k(x+y)/\sqrt{2} = (2n+1)\pi \quad \text{et} \quad \boxed{x + y = (2n+1)\,\frac{\lambda\sqrt{2}}{4}}$$

9. OEPPM $(\vec{E}_3, \vec{B}_3)$.

$$\vec{n}_3 = (\vec{e}_x - \vec{e}_y)/\sqrt{2}$$

Le champ électrique en notation réelle.

$$\boxed{\vec{E}_3 = E_0.\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).\vec{e}_z}$$

Le champ électrique en notation complexe.

$$\boxed{\underline{\vec{E}_3} = E_0.\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)\right].\vec{e}_z}$$

Le champ magnétique en notation réelle : relation de structure $\vec{n}_3 \times \vec{E}_3 = c.\vec{B}_3$

$$\vec{B}_3 = \frac{\vec{n}_3 \times \vec{E}_3}{c} = \frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \times \vec{e}_z$$

D'où

$$\boxed{\vec{B}_3 = -\frac{E_0}{\sqrt{2}.c}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right).(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}$$

Et en notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{B}_3} = -\frac{E_0}{\sqrt{2}.c}\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)\right].(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}$$

10. La résultante $(\vec{E}', \vec{B}')$.

Champ électrique en notation complexe

$$\underline{\vec{E}}' = \underline{\vec{E}_1} + \underline{\vec{E}_3} = E_0.e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)}.\vec{e}_z + E_0.e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)}.\vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}}' = E_0.e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \omega t\right)}\left\{e^{i\frac{k}{\sqrt{2}}y} + e^{-i\frac{k}{\sqrt{2}}y}\right\}.\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{E}}' = 2E_0.e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \omega t\right)}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right).\vec{e}_z}$$

Champ électrique en notation réelle

$$\boxed{\vec{E}' = 2E_0.\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \omega t\right).\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right).\vec{e}_z}$$

Champ magnétique en notation complexe

$$\underline{\vec{B}}' = \underline{\vec{B}_1} + \underline{\vec{B}_3} = \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x + \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)}.(\vec{e}_x + \vec{e}_y) - \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y - \omega t\right)}.(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\underline{\vec{B}}' = \frac{E_0}{\sqrt{2}.c}e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \omega t\right)}\left\{e^{i\frac{k}{\sqrt{2}}y} - e^{-i\frac{k}{\sqrt{2}}y}\right\}.(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{B}}' = \frac{i\sqrt{2}.E_0}{c}e^{i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \omega t\right)}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right).(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}$$

Champ magnétique en notation réelle

$$\boxed{\vec{B}' = -\frac{\sqrt{2}.E_0}{c}.\sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}x - \omega t\right).\sin\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right).(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}$$

11. La nature de l'onde : *Onde progressive suivant l'axe $\vec{e}_x$ dont l'amplitude est modulée suivant l'axe $\vec{e}_y$.*

<u>QUESTIONS DE COURS :</u> (04 *points*)

1. Relations entre les champs $(\vec{E},\vec{B})$ et les potentiels $(V,\vec{A})$.

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})}$$

2. Condition de jauge de LORENTZ.

$$\boxed{div(\vec{A}) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

3. Les équations de POISSON dépendantes du temps.

En utilisant la forme locale du théorème de GAUSS

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad div\left(-\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} div(\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or, d'après la jauge de LORENTZ

$$div(\vec{A}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\Delta V - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Pour le potentiel vecteur

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right) - \Delta\vec{A}$$

Or, d'après la jauge de LORENTZ

$$div(\vec{A}) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \Delta\vec{A}$$

La forme locale de l'équation de MAXWELL–AMPERE

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

D'où

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

En comparant ces deux équations, il vient que

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$$

4. Equations de propagation des potentiels en absence de charges et de courants.

Pour $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$

$$\boxed{\Delta V - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0} \quad ; \quad \boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$