CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01: (10 *points*)

1. La forme *locale* des équations de MAXWELL dépendantes du temps.

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \; ; \; \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \; ; \; \boxed{div(\vec{B}) = 0} \; ; \; \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

2. En absence de charges $(\boldsymbol{\rho = 0})$ et de courants $(\vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{0}})$.

$$\boxed{div(\vec{E}) = 0} \; ; \; \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \; ; \; \boxed{div(\vec{B}) = 0} \; ; \; \boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

3. Equation de propagation.

Champ électrique :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$$

(car on peut inverser les dérivées). D'autre part

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \qquad \text{car} \qquad div(\vec{E}) = 0$$

Et

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où l'équation suivante :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Champ magnétique :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}$$

(car on peut inverser les dérivées).D'autre part

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\vec{B})\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \qquad \text{car} \qquad div(\vec{B}) = 0$$

Et

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'où l'équation suivante :

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

4. Vitesse de propagation.

Les champs électrique et magnétique sont solution de l'équation de propagation

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

c est la vitesse de propagation.

$$\boxed{c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \quad ; \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 3 \times 10^8 \ m/s$$

Donc c est égale à la vitesse de la lumière.

5. Expression complexe du champ.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}.\exp\left[i\left(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t\right)\right] = \underline{\vec{E}_0}.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right]$$

L'équation de propagation (en utilisant les coordonnées cartésiennes).

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Dérivons l'expression complexe

$$\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = (ik_x)^2.\underline{\vec{E}_0}.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] = -k_x^2.\underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial y^2} = \left(ik_y\right)^2.\underline{\vec{E}_0}.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] = -k_y^2.\underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2} = (ik_z)^2.\underline{\vec{E}_0}.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] = -k_z^2.\underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = (-i\omega)^2.\underline{\vec{E}_0}.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] = -\omega^2.\underline{\vec{E}}$$

En remplaçant dans l'équation de propagation

$$-\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right).\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

Donc $\underline{\vec{E}}$ est bien une solution de l'équation de propagation à condition que

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega}{c} = k} \quad \text{ou} \quad \boxed{\omega = k.c}$$

Avec $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ est le module du vecteur d'onde $\vec{k}$.

6. En notation complexe nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = (ik_x).\underline{\vec{E}}_0.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] \\ \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial y} = \left(ik_y\right).\underline{\vec{E}}_0.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] \\ \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} = (ik_z).\underline{\vec{E}}_0.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \equiv ik_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \equiv ik_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \equiv ik_z \end{cases}$$

Et

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \equiv ik_x.\vec{e}_x + ik_y.\vec{e}_y + ik_y.\vec{e}_z \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \equiv i\vec{k}}$$

De même

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = (-i\omega).\underline{\vec{E}}_0.\exp\left[i\left(k_x.x + k_y.y + k_z.z - \omega t\right)\right] = (-i\omega).\underline{\vec{E}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega}$$

7. Equations de maxwell en absence de charges $(\boldsymbol{\rho = 0})$ et de courants $\left(\vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\mathbf{0}}\right)$

$$\begin{cases} div\left(\underline{\vec{E}}\right) = 0 \\ div\left(\underline{\vec{B}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \bullet \underline{\vec{E}} = 0 \\ \vec{\nabla} \bullet \underline{\vec{B}} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} i\vec{k} \bullet \underline{\vec{E}} = 0 \\ i\vec{k} \bullet \underline{\vec{B}} = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \vec{k} \perp \underline{\vec{E}} \\ \vec{k} \perp \underline{\vec{B}} \end{cases}$$

8. Equations de maxwell en absence de charges $(\boldsymbol{\rho = 0})$ et de courants $\left(\vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\mathbf{0}}\right)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{E}}\right) = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{B}}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{cases} \equiv \begin{cases} i\vec{k} \times \underline{\vec{E}} = -(-i\omega)\underline{\vec{B}} \\ i\vec{k} \times \underline{\vec{B}} = \dfrac{1}{c^2}(-i\omega)\underline{\vec{E}} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \vec{k} \times \underline{\vec{E}} = \omega.\underline{\vec{B}} \\ \vec{k} \times \underline{\vec{B}} = -\dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \end{cases}$$

Comme $\omega = k.c$, nous obtenons les équations de structures de l'onde électromagnétique

$$\boxed{\vec{n} \times \underline{\vec{E}} = c.\underline{\vec{B}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{n} \times \underline{\vec{B}} = -\frac{1}{c}\underline{\vec{E}}}$$

$\vec{n} = \vec{k}/k$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

EXERCICE 02: (10 *points*)

1. **Loi de Biot et Savart pour une distribution volumique de courants.**

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}d\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}}{r}d\tau}$$

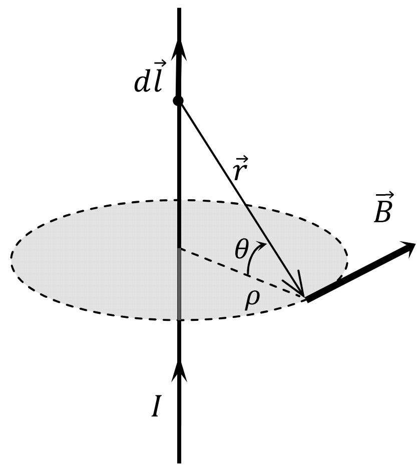
2. **Loi de Biot et Savart pour des courants filiformes stationnaires.**

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{d\vec{l}}{r}}$$

3. **Champ magnétique crée par courant droit infini :**

Utilisons la relation

$$\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_L \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



Puisque $\vec{B}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{B}$ est tengent au cercle de rayon ρ et et centré sur le fil droit, donc

$$\left|d\vec{l}\times\vec{r}\right| = dl.r.\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = dl.r.\cos(\theta)$$

Paramétrage : $(-\pi/2 \le \theta \le +\pi/2)$

$$dl=\frac{\rho}{\cos^2\theta}d\theta \quad \text{et} \quad r=\frac{\rho}{\cos\theta}$$

D'où le module de $\vec{B}$ est égal à l'intégrale

$$B=\frac{\mu_0.I}{4\pi}\oint_C \frac{dl}{r^2}=\frac{\mu_0.I}{4\pi.\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,.\,d\theta$$

Enfin

$$\boxed{B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}} \quad \text{et en coordonnées cylindriques} \quad \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\vec{e}_\varphi}$$

4. **En utilisant le théorème d'ampère :**

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r}=\mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Tout d'abord nous devons choisir la boucle qui respecte la symétrie du champ magnétique. Pour cela, cherchons les plans de symétrie de la distribution de courant.
Tous les plans contenant le fil droit parcouru par le courant sont des plans de symétrie. Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie, alors, le champ magnétique crée par ce courant tengent au cercle de rayon ρ et et centré sur le fil droit.

$$\vec{B}=B_\varphi.\vec{e}_\varphi$$

Nous utilisons donc les coordonnées cylindriques et $d\vec{r}=d\rho.\vec{e}_\rho+\rho d\varphi.\vec{e}_\varphi+dz.\vec{e}_z$

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r}=\int_C \left(B_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)\bullet\left(d\rho.\vec{e}_\rho+\rho d\varphi.\vec{e}_\varphi+dz.\vec{e}_z\right)=\rho\int_0^{2\pi}B_\varphi.d\varphi$$

ρ étant le rayon constant du cercle

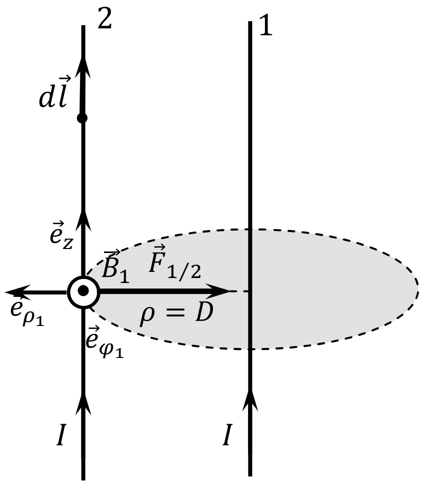
En plus, si nous utilisons la symétrie de rotation autour de l'axe du courant : B_φ est constant sur C. Donc

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \rho . B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho . B_\varphi$$

Et le courant I traversant la boucle (dirigé suivant $\vec{e}_z$)

$$\sum I_{\text{int}} = I \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho . B_\varphi = \mu_0 . I \quad \text{donc} \quad B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\vec{e}_\varphi}$$

5. Deux fils parallèles parcourus par un courant I dans le même sens.



Le champ crée par le conducteur 1 en tout point du conducteur 2.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}\vec{e}_{\varphi_1} \qquad \text{avec} \quad \rho = D$$

La force appliquée par 1 sur une longueur l du conducteur 2.

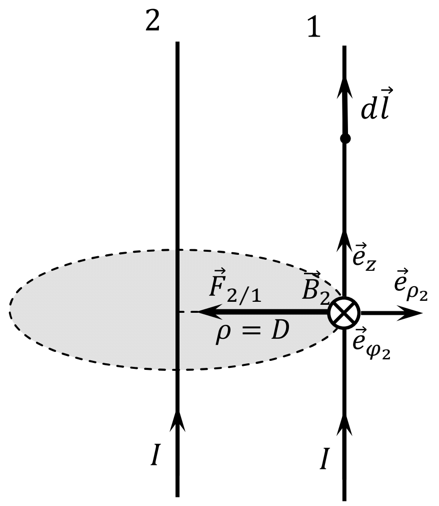
$$\vec{F}_{1/2}(l) = I\oint_l d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

Or $d\vec{l}_2 = dz.\vec{e}_z$ donc

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_{\varphi_1}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\vec{e}_{\rho_2}$$

En intégrant

$$\vec{F}_{1/2}(l) = -\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{D}\int_l dz\right)\vec{e}_{\rho_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{1/2}(l) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2.l}{D}\vec{e}_{\rho_1}}$$



Le champ crée par le conducteur 2 en tout point du conducteur 1.

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}\vec{e}_{\varphi_2} \qquad \text{avec} \quad \rho = D$$

La force appliquée par 2 sur une longueur l du conducteur 1.

$$\vec{F}_{2/1}(l) = I\oint_l d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$

Or $d\vec{l}_1 = dz.\vec{e}_z$ donc

$$d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_{\varphi_2}\right) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\vec{e}_{\rho_2}$$

En intégrant

$$\vec{F}_{2/1}(l) = -\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{D}\int_l dz\right)\vec{e}_{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{2/1}(l) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2.l}{D}\vec{e}_{\rho_2}}$$

Les deux forces sont attractives et ont le même module.

6. Deux fils parallèles parcourus par un courant I dans des sens opposés.

Le champ crée par le conducteur 1 en tout point du conducteur 2.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}\vec{e}_{\varphi_1} \qquad \text{avec} \quad \rho = D$$

Et la force appliquée par 1 sur une longueur l du conducteur 2.

$$\vec{F}_{1/2}(l) = I\oint_l d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

Or $d\vec{l}_2 = -dz.\vec{e}_z$ donc

$$d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_{\varphi_1}\right) = +\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\vec{e}_{\rho_1}$$

En intégrant

$$\vec{F}_{1/2}(l) = +\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{D}\int_l dz\right)\vec{e}_{\rho_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{1/2}(l) = +\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2.l}{D}\vec{e}_{\rho_1}}$$

Le champ crée par le conducteur 2 en tout point du conducteur 1.

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}\vec{e}_{\varphi_2} \qquad \text{avec} \quad \rho = D$$

La force appliquée par 2 sur une longueur l du conducteur 1.

$$\vec{F}_{2/1}(l) = I\oint_l d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$

Or $d\vec{l}_1 = dz.\vec{e}_z$ donc

$$d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\left(\vec{e}_z \times \vec{e}_{\varphi_2}\right) = +\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{D}dz.\vec{e}_{\rho_2}$$

En intégrant

$$\vec{F}_{2/1}(l) = +\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{D}\int_l dz\right)\vec{e}_{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{1/2}(l) = +\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2.l}{D}\vec{e}_{\rho_2}}$$

Les deux forces sont répulsives et ont le même module.

7. Calcul du champ magnétique :

Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie est toujours perpendiculaire au plan de symétrie. Les plans de symétrie de la distribution de courants sont tous les plans passant par le centre de la sphère radioactive.
En chaque point de l'espace il y a une infinité de plans de symétrie qui se coupent (figure en bas à droite).
Dans ce cas le champ magnétique est nul en tout point de l'espace.

$$\boxed{\vec{B}(r,t) = \vec{0}}$$