CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01: (10 *points*)

1. Montrer que le théorème d'Ampère n'est valable que dans le cas d'un régime stationnaire.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j}$$

Donc

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 . div(\vec{j}) = 0 \quad \text{ou} \quad div(\vec{j}) = 0$$

L'équation de continuité

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Comme

$$div(\vec{j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

D'où le régime est stationnaire (ou permanent).

2. Distribution de courant stationnaire.

$$\vec{j} = \rho . \vec{v} = \rho \omega . r . \vec{e}_\varphi$$

Calculons $div(\vec{j})$ en utilisant les coordonnées cylindriques (nous avons utilisé la coordonnée r et gardé ρ pour la densité de charges)

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_r}{\partial r} + \frac{1}{r} j_r + \frac{1}{r}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Avec

$$\vec{j} = j_r \vec{e}_r + j_\varphi \vec{e}_\varphi + j_z \vec{e}_z = \rho \omega . r . \vec{e}_\varphi$$

$$div(\vec{j}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho\omega . r)}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{avec} \quad j_r = j_z = 0$$

$div(\vec{j}) = 0$, le régime est donc stationnaire.

3. Plans de symétrie de la distribution de courants.

Tous les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre sont des axes de symétrie. Donc ***tous les plans parallèles au plan*** $(\boldsymbol{Oxy})$ sont des plans de symétrie de la distribution de courants.

4. Direction du champ magnétique.

- Le champ magnétostatique en un point situé sur un plan de symétrie définit par la distribution de courant est toujours perpendiculaire au plan de symétrie.
- Dans notre cas, pour un point quelconque de l'espace, nous pouvons toujours trouver un plan de symétrie passant par se point et ce plan est parallèle au plan (Oxy).
- Donc le champ magnétique est toujours parallèle à l'axe (Oz) :

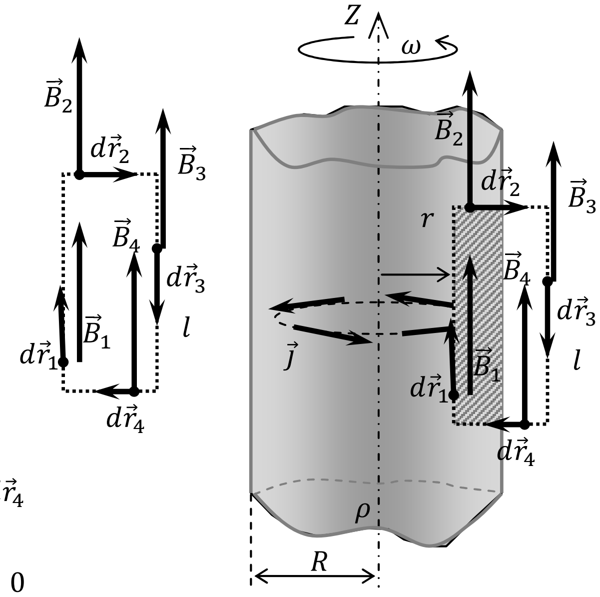
$$\boxed{\vec{B} = B_z . \vec{e}_z}$$

5. Expression du vecteur champ magnétostatique.

Théorème d'Ampère (forme intégrale) :

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Le champ étant toujours dans la même direction $\vec{B} = B_z.\vec{e}_z$, la boucle que nous choisissons pour calculer la circulation est une boucle rectangulaire dont deux côtés sont parallèles à l'axe du cylindre $(l_1 = l_3 = l)$ et deux côtés qui sont perpendiculaires $(l_2 = l_4 = h)$, comme le montre la figure ci-contre.



$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{B}_1\bullet d\vec{r}_1 + \int_{l_2} \vec{B}_2\bullet d\vec{r}_2 + \int_{l_3} \vec{B}_3\bullet d\vec{r}_3 + \int_{l_4} \vec{B}_4\bullet d\vec{r}_4$

Comme

$\vec{B}_2 \perp d\vec{r}_2$ et $\vec{B}_4 \perp d\vec{r}_4 \quad \Rightarrow \quad \int_{l_2} \vec{B}_2\bullet d\vec{r}_2 = \int_{l_4} \vec{B}_4\bullet d\vec{r}_4 = 0$

Et

$\vec{B}_1 \parallel d\vec{r}_1$ (même sens) $\quad \Rightarrow \quad \int_{l_1} \vec{B}_1\bullet d\vec{r}_1 = \int_{l_1} B_1.dr_1$

$\vec{B}_3 \parallel d\vec{r}_3$ (sens opposés) $\quad \Rightarrow \quad \int_{l_3} \vec{B}_3\bullet d\vec{r}_3 = -\int_{l_3} B_3.dr_3$

D'où

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_{l_1} B_1.dr_1 - \int_{l_3} B_3.dr_3$$

En plus, si nous utilisons la symétrie de translation le long de l'axe du cylindre :

$\vec{B}_1$ est constant sur l_1 $(B_1 = \text{constante})$ et $\vec{B}_3$ est constant sur l_3 $(B_3 = \text{constante})$.

Donc

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = B_1\int_{l_1} dr_1 - B_3\int_{l_3} dr_3 = (B_1 - B_3).l$$

D'où le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = (B_1 - B_3).l = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

Champ magnétique à l'extérieur du cylindre : (nous plaçons la boucle à l'extérieur du cylindre)

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (B_1 - B_3).l = 0 \quad \text{donc} \quad B_1 = B_3 \quad \text{et} \quad B_{\text{ext}} = \text{constante}$$

Si nous prenons $B_{\text{ext}}(r \to +\infty) = 0$, alors

$$\boxed{B_{\text{ext}} = 0}$$

Champ magnétique à l'intérieur du cylindre:

Pour calculer la valeur de $B_{\text{int}}(r)$ nous plaçons la boucle à cheval entre la zone intérieure et la zone extérieure du cylindre, le coté l_1 à une distance r de l'axe (Oz).

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}\bullet d\vec{s} = \iint j.ds = \int_0^l \int_r^R \rho\omega.r.drdz \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = \frac{1}{2}\rho\omega l(R^2 - r^2)$$

$$(B_{\text{int}} - B_{\text{ext}}).l = \frac{\mu_0}{2}\rho\omega l(R^2 - r^2) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{B_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_0}{2}\rho\omega(R^2 - r^2)}$$

EXERCICE 02: **(10 *points*)**

1. Equation d'onde d'une OEPPM se propageant dans une direction quelconque.

En notation réelle

$$\boxed{\vec{E} = E_{0x}.\cos\left(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t + \varphi_x\right).\vec{e}_x + E_{0y}.\cos\left(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t + \varphi_y\right).\vec{e}_y + E_{0z}.\cos\left(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t + \varphi_z\right).\vec{e}_z}$$

En notation complexe

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0.e^{i\left(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t\right)} = \left(E_{0x}.e^{i\varphi_x}.\vec{e}_x + E_{0y}.e^{i\varphi_y}.\vec{e}_y + E_{0z}.e^{i\varphi_z}.\vec{e}_z\right)e^{i\left(\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t\right)}}$$

2. En notation complexe.

Calculons les dérivées du champ électrique complexe.

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \underline{\vec{E}}_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left\{i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right\}\right\} = (-i\omega)\underline{\vec{E}}_0.\exp\left\{i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right\}$$

Donc

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega.\underline{\vec{E}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega}$$

De même que

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial x} = \underline{\vec{E}}_0\frac{\partial}{\partial x}\left\{\exp\left\{i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega.t\right)\right\}\right\} = (ik_x)\underline{\vec{E}}_0.\exp\left\{i\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega.t\right)\right\}$$

Donc

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial x} = ik_x.\underline{\vec{E}} \quad ; \quad \frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial y} = ik_y.\underline{\vec{E}} \quad ; \quad \frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} = ik_z.\underline{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \equiv ik_x \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv ik_y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv ik_z$$

Alors nous pouvons écrire l'opérateur NABLA en coordonnées cartésiennes.

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \equiv i\vec{k}}$$

3. Relation de structure d'une OEPPM :

D'après la question précédente

$$\boxed{div\left(\underline{\vec{E}}\right) = \vec{\nabla}\bullet\underline{\vec{E}} = i\vec{k}\bullet\underline{\vec{E}}} \quad ; \quad \boxed{\overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{E}}\right) = \vec{\nabla}\times\underline{\vec{E}} = i\vec{k}\times\underline{\vec{E}}} \quad ; \quad \boxed{\Delta\underline{\vec{E}} = -k^2.\underline{\vec{E}}}$$

En réécrivant les équations de MAXWELL en notion complexe on trouve.

$$\begin{cases} div\left(\underline{\vec{E}}\right) = 0 & \Leftrightarrow \quad i\vec{k}\bullet\underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{\vec{E}} \perp \vec{k} \\ div\left(\underline{\vec{B}}\right) = 0 & \Leftrightarrow \quad i\vec{k}\bullet\underline{\vec{B}} = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{\vec{B}} \perp \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{E}}\right) = -\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} & \Leftrightarrow \quad i\vec{k}\times\underline{\vec{E}} = i\omega.\underline{\vec{B}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{n}\times\underline{\vec{E}} = c.\underline{\vec{B}}} \\ \overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{B}}\right) = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} & \Leftrightarrow \quad i\vec{k}\times\underline{\vec{B}} = -\dfrac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{n}\times\underline{\vec{B}} = -\dfrac{1}{c}\underline{\vec{E}}} \end{cases}$$

Les deux premières équations montrent directement que les champs électrique et magnétique sont transversaux, les deux dernières donnent les relations de structure de l'OEPPM.

$$\vec{E} = E_0.\cos\alpha\,.\cos(kz+\omega t)\,.\vec{e}_x + E_0.\sin\alpha\,.\sin(kz+\omega t)\,.\vec{e}_y$$

4. Direction de propagation : axe (Oz) vers les z décroissants

Vecteur unitaire dans la direction de propagation : $\boxed{\vec{n} = -\vec{e}_z}$

5. Etat de polarisation de l'OEPPM.

$(\boldsymbol{\alpha = 0})$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = E_0.\cos(kz+\omega t)\,.\vec{e}_x$ polarisation rectiligne (suivant $\vec{e}_x$)

$(\boldsymbol{\alpha = \pi/2})$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = E_0.\sin(kz+\omega t)\,.\vec{e}_y$ polarisation rectiligne (suivant $\vec{e}_y$)

$(\boldsymbol{\alpha = \pi/4})$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos(kz+\omega t)\,.\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\sin(kz+\omega t)\,.\vec{e}_y$

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos(kz+\omega t)\,.\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos\left(kz+\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_y$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{0x} = E_{0y} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0}$$

Polarisation circulaire gauche (sens direct).

$(\boldsymbol{\alpha = 3\,\pi/4})$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos(kz+\omega t)\,.\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\sin(kz+\omega t)\,.\vec{e}_y$

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos(kz+\omega t+\pi)\,.\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos\left(kz+\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_y$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{3\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{0x} = E_{0y} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0}$$

Polarisation circulaire droite (sens indirect).

6. Expression du champ électrique $(\boldsymbol{\alpha = \pi/4})$.

En notation réelle

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos(kz+\omega t)\,.\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.\cos\left(kz+\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_y}$$

En notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.e^{i(kz+\omega t)}.\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.e^{i(kz+\omega t-\pi/2)}.\vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.e^{i(kz+\omega t)}\left(\vec{e}_x + e^{-i\pi/2}.\vec{e}_y\right)$$

Donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0.e^{i(kz+\omega t)}\left(\vec{e}_x - i.\vec{e}_y\right)}$$

7. Calcul du champ magnétique :

En notation réelle

$$-\vec{e}_z \times \vec{E} = c.\vec{B}$$

D'où

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{c}.\cos(kz+\omega t).(-\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{c}.\cos\left(kz+\omega t-\frac{\pi}{2}\right).(-\vec{e}_z \times \vec{e}_y)$$

Et donc

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{c}.\cos\left(kz+\omega t-\frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{c}.\cos(kz+\omega t).\vec{e}_y}$$

En notation complexe

$$-\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}} = c.\underline{\vec{B}}$$

D'où

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{c}.e^{i(kz+\omega t)}\left(-\vec{e}_z \times \left(\vec{e}_x - i.\vec{e}_y\right)\right)$$

Et donc

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{E_0}{c}.e^{i(kz+\omega t)}\left(i.\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)}$$

8. Vecteur de Poynting.

Dans le cas d'une OEPPM

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{n}$$

Donc

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{1}{2}E_0^2.\cos^2(kz+\omega t) + \frac{1}{2}E_0^2.\sin^2(kz+\omega t)\right)(-\vec{e}_z)$$

$$\boxed{\vec{P} = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_z}$$

9. Energie d'un rayonnement d'incidence normale par unité de surface et de temps.

$$\mathcal{P} = \frac{dU_{\text{ém}}}{dt} = P.S$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{S}\frac{dU_{\text{ém}}}{dt} = P = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}}$$

Application numérique

$$\boxed{P = 1{,}3262 \times 10^3\ J.s^{-1}m^{-2}}$$