CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME.

EXERCICE 01: (07 *points*)

1. **La symétrie de la distribution de charges est cylindrique**. En effet, la densité volumique étant indépendante de φ et de z la distribution est invariante par ration et par translation par rapport à l'axe (Oz).
   - D'où, tout axe passant perpendiculairement par l'axe (Oz) est un axe de symétrie.
   - Le champ électrostatique en un point situé sur un axe de symétrie est toujours parallèle à l'axe de symétrie.
   - Comme nous pouvons toujours trouver un axe de symétrie perpendiculaire à (Oz) et passant un point quelconque M. Alors, le champ électrostatique en ce point est parallèle à cet axe, et donc

$$\boxed{\vec{E} = E_r.\vec{e}_r}$$

2. Théorème de GAUSS :

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

La symétrie du champ est une ***symétrie cylindrique***, donc la surface de GAUSS est un cylindre de rayon r et de hauteur h ayant le même axe que la distribution de charge et fermé par deux disques de rayon r.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E} \bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \bullet d\vec{s}_3$$

A partir de la figure

$$\vec{E} \parallel d\vec{s}_1 \quad ; \quad \vec{E} \perp d\vec{s}_2 \quad ; \quad \vec{E} \perp d\vec{s}_3$$

Donc

$$\vec{E} \bullet d\vec{s}_1 = E.ds_1 \quad ; \quad \vec{E} \bullet d\vec{s}_2 = 0 \quad ; \quad \vec{E} \bullet d\vec{s}_3 = 0$$

Et

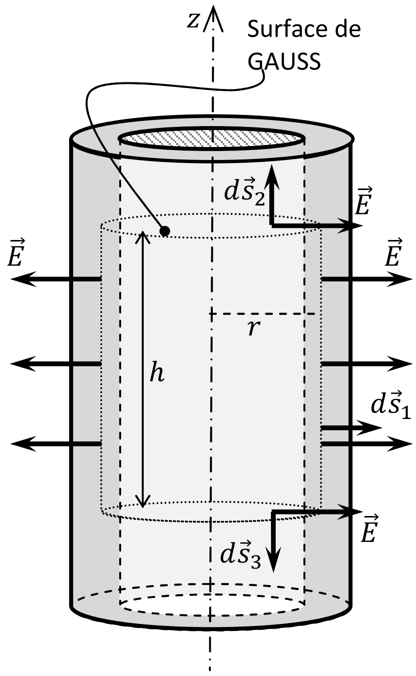
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E} \bullet d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E.ds_1 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

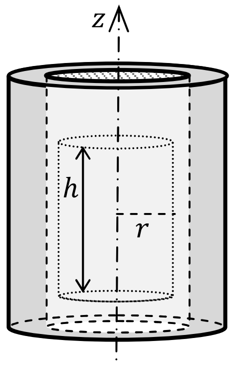
Par symétrie de rotation et de translation E est constant sur la surface S_1.

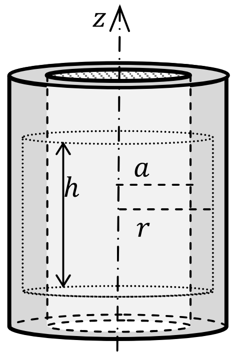
$$\iint_{S_1} E.ds_1 = E.S_1 = E.2\pi r.h$$

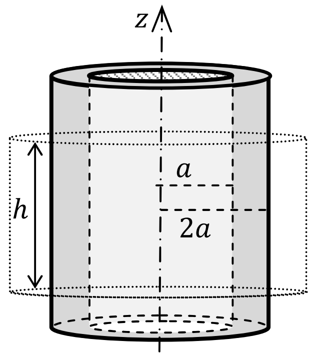
Donc

$$\boxed{E.2\pi r.h = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$









Champ électrostatique à l'intérieur de la distribution (dans la cavité) : $(r \leq a)$

$$\sum Q_{int} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{\text{int}}.2\pi r.h = 0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{E_{\text{int}} = 0}$$

Champ électrostatique à l'intérieur de la couche cylindrique : $(a \leq r \leq b)$

$$\sum Q_{int} = \int dq = \int_{int} \rho.d\tau$$

En utilisant les coordonnées cylindriques

$$\sum Q_{int} = \int_{int} \frac{\sigma_0}{r} rdrd\varphi dz = \sigma_0 \int_a^r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = 2\pi h.\sigma_0(r-a)$$

et

$$E_{\text{couche}}.2\pi r.h = 2\pi h.\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(r-a) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_{\text{couche}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{r}\right)}$$

Champ électrostatique à l'extérieur de la distribution : $(r \geq b)$

$$\sum Q_{int} = \int dq = \int_{int} \rho.d\tau$$

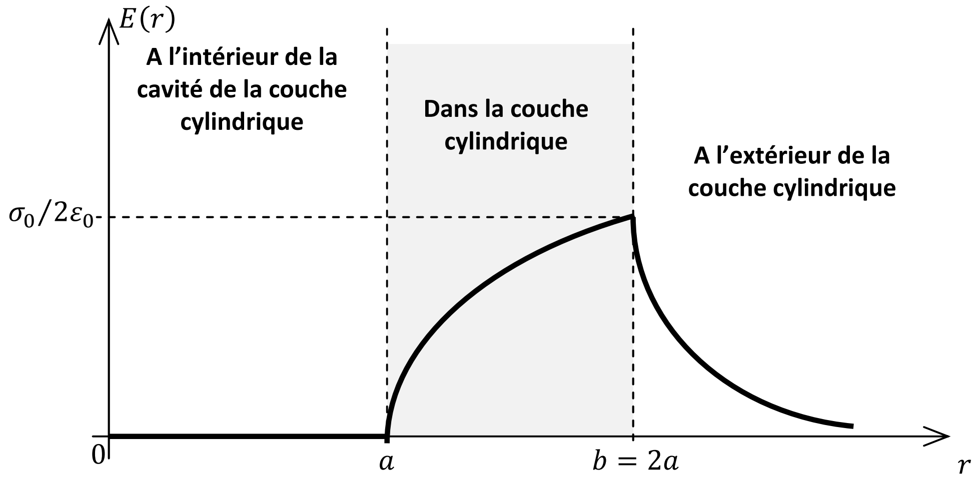
En utilisant les coordonnées cylindriques

$$\sum Q_{int} = \int_{int} \frac{\sigma_0}{r} rdrd\varphi dz = \sigma_0 \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = 2\pi h.\sigma_0(b-a)$$

et

$$E_{\text{ext}}.2\pi r.h = 2\pi h.\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}a \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_{\text{ext}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}}$$

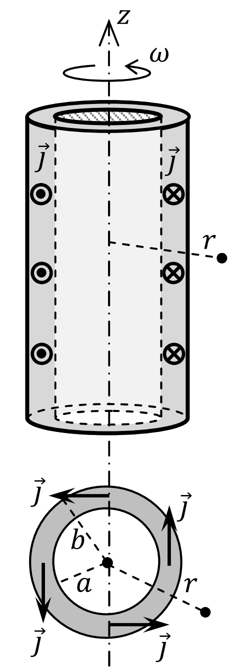
3. Représentation du champ.



4. Que peut-on dire, dans ce cas, sur la continuité du champ électrostatique?

Puisque la distribution de charges est volumique, alors la ***composante normale*** du champ électrostatique (E_r), qui est dans notre cas la seule composante non nulle du champ, ***est continue dans tout l'espace***, notamment aux différent points de changement de zone ($r = a$ et $r = b$) (points de discontinuité de la distribution de charges).

<u>EXERCICE 02:</u> (09 *points*)



1. Densité volumique de courant crée par le mouvement de charge

$$\vec{j} = \rho.\vec{v} = \frac{\sigma_0}{r}\left(r.\omega.\vec{e}_\varphi\right)$$

D'où

$$\boxed{\vec{j} = \sigma_0.\omega.\vec{e}_\varphi}$$

Distribution de courant stationnaire.

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_r}{\partial r} + \frac{1}{r}j_r + \frac{1}{r}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Comme : $j_r = j_z = 0$ et $j_\varphi = \sigma_0.\omega =$ constante. Donc :

$$\boxed{div(\vec{j}) = 0}$$

Le courant est donc stationnaire et le champ magnétique crée est statique.

2. Plans de symétrie de la distribution de courants.

Tous les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre sont des axes de symétrie. Donc ***tous les plans parallèles au plan*** $(\boldsymbol{Oxy})$ sont des plans de symétrie de la distribution de courants.

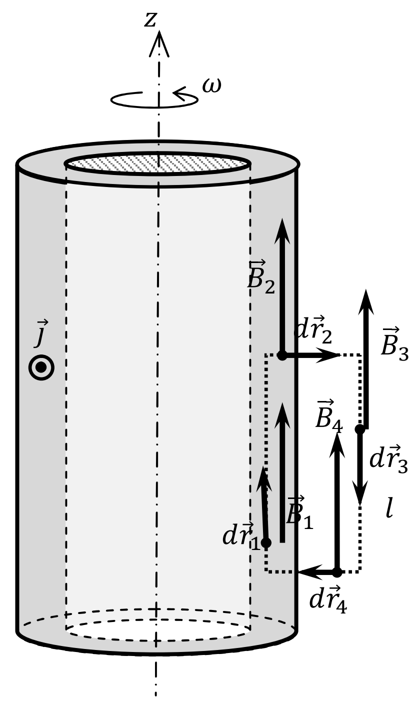
3. Direction du champ magnétostatique en un point quelconque de l'espace.

- Le champ magnétostatique en un point situé sur un plan de symétrie définit par la distribution de courant est toujours perpendiculaire au plan de symétrie.
- Dans notre cas, pour un point quelconque de l'espace, nous pouvons toujours trouver un plan de symétrie passant par se point et ce plan est parallèle au plan (Oxy).
- Donc le champ magnétique est toujours parallèle à l'axe (Oz) :

$$\boxed{\vec{B} = B_z.\vec{e}_z}$$

4. Théorème d'Ampère.

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$



Le champ étant toujours dans la même direction $\vec{B} = B_z.\vec{e}_z$, la boucle que nous choisissons pour calculer la circulation est une boucle rectangulaire dont deux côtés sont parallèles à l'axe du cylindre $(l_1 = l_3 = l)$ et deux côtés qui sont perpendiculaires $(l_2 = l_4 = h)$, comme le montre la figure ci-contre.

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{B}_1\bullet d\vec{r}_1 + \int_{l_2} \vec{B}_2\bullet d\vec{r}_2 + \int_{l_3} \vec{B}_3\bullet d\vec{r}_3 + \int_{l_4} \vec{B}_4\bullet d\vec{r}_4$$

Comme

$$\vec{B}_2 \perp d\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_4 \perp d\vec{r}_4 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{l_2} \vec{B}_2\bullet d\vec{r}_2 = \int_{l_4} \vec{B}_4\bullet d\vec{r}_4 = 0$$

Et

$$\vec{B}_1 \parallel d\vec{r}_1 \;\; \text{(même sens)} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{l_1} \vec{B}_1\bullet d\vec{r}_1 = \int_{l_1} B_1.dr_1$$

$$\vec{B}_3 \parallel d\vec{r}_3 \;\; \text{(sens opposés)} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{l_3} \vec{B}_3\bullet d\vec{r}_3 = -\int_{l_3} B_3.dr_3$$

D'où

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = \int_{l_1} B_1.dr_1 - \int_{l_3} B_3.dr_3$$

En plus, si nous utilisons la symétrie de translation le long de l'axe du cylindre :
$\vec{B}_1$ est constant sur l_1 ($B_1 = \text{constante}$) et $\vec{B}_3$ est constant sur l_3 ($B_3 = \text{constante}$).
Donc

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = B_1 \int_{l_1} dr_1 - B_3 \int_{l_3} dr_3 = (B_1 - B_3).l$$

D'où le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{r} = (B_1 - B_3).l = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

<u>Champ magnétostatique à l'extérieur de la distribution</u> : $(r \geq b)$

Nous plaçons la boucle totalement à l'extérieur de la couche cylindrique.

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (B_1 - B_3).l = 0 \quad \text{donc} \quad B_1 = B_3 \quad \text{et} \quad B_{\text{ext}} = \text{constante}$$

Si nous prenons $B_{\text{ext}}(r \to +\infty) = 0$, alors

$$\boxed{B_{\text{ext}} = 0}$$

<u>Champ magnétostatique à l'intérieur de la distribution (dans la cavité)</u> : $(r \leq a)$

Nous plaçons la boucle totalement à l'extérieur de la couche cylindrique.

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (B_1 - B_3).l = 0 \quad \text{donc} \quad B_1 = B_3 \quad \text{et} \quad B_{\text{int}} = \text{constante}$$

Pour calculer la valeur de B_{int} nous plaçons la boucle à cheval entre la zone intérieure et la zone extérieure de la couche cylindrique.

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint j.ds = j.S \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = \sigma_0.\omega.l.(b-a)$$

Nous avons utilisé le fait que : $\vec{j} \parallel d\vec{s}$ et $j = \sigma_0.\omega = \text{constante}$.

$$(B_{\text{int}} - B_{\text{ext}}).l = \mu_0\sigma_0.\omega.la \qquad \text{donc} \qquad \boxed{B_{\text{int}} = \mu_0\sigma_0.\omega.a}$$

<u>Champ magnétostatique à l'intérieur de la couche cylindrique</u> : $(a \leq r \leq b)$

Pour calculer la valeur de $B_{\text{couche}}(r)$ nous plaçons la boucle à cheval entre la zone se trouvant dans la couche cylindrique et la zone à l'extérieure de la couche cylindrique, le coté l_1 à une distance r de l'axe (Oz).

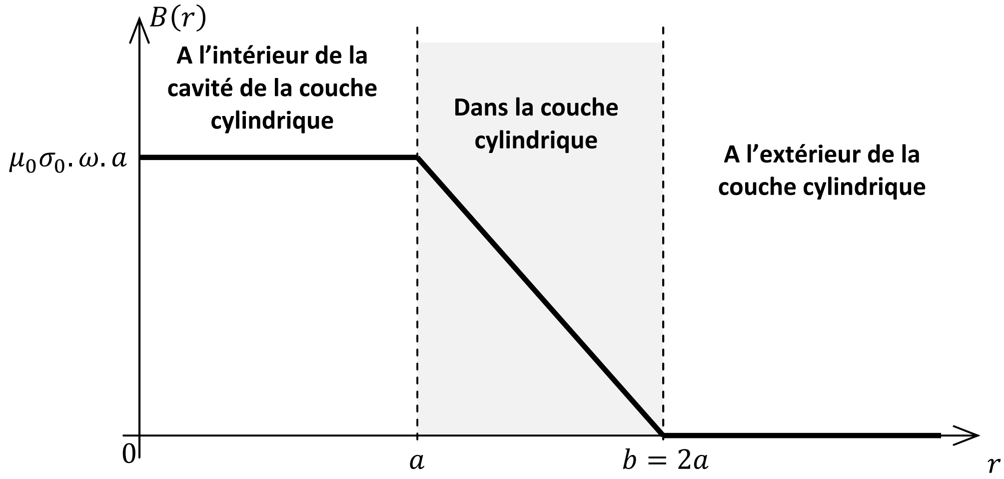
$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint j.ds = j.S \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = \sigma_0.\omega.l.(b-r)$$

Nous avons utilisé le fait que : $\vec{j} \parallel d\vec{s}$ et $j = \sigma_0.\omega = \text{constante}$.

$$(B_{\text{couche}} - B_{\text{ext}}).l = \mu_0\sigma_0.\omega.la \qquad \text{donc} \qquad \boxed{B_{\text{couche}} = \mu_0\sigma_0.\omega.(2a-r)}$$

Nous aurions pu, tout aussi bien, placer la boucle à cheval entre la zone se trouvant à l'intérieure de la couche cylindrique et la zone se trouvant dans la couche cylindrique, le coté l_3 à une distance r de l'axe (Oz). Le résultat serait le même.

5. Allure de $B(r)$ en fonction de r.



6. Que peut-on dire, dans ce cas, sur la continuité du champ magnétostatique?

Puisque la distribution de courants est volumique, alors la ***composante tangentielle*** du champ magnétostatique (B_z), qui est dans notre cas la seule composante non nulle du champ, ***est continue dans tout l'espace***, notamment aux différent points de changement de zone ($r = a$ et $r = b$) (points de discontinuité de la distribution de courants).

QUESTIONS DE COURS : (04 *points*)

1. Circulation et flux du champ électrostatique.

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	FORME INTÉGRALE	FORME LOCALE
Circulation	$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{r} = 0$	$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$
Flux	$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2. Circulation et flux du champ magnétostatique.

CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE	FORME INTÉGRALE	FORME LOCALE
Circulation	$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0 . \sum I_{\text{int}}$	$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j}$
Flux	$\oiint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0$	$div(\vec{B}) = 0$

3. Forme locale de l'équation de continuité.

$$\boxed{div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

$\rho(\vec{r}, t)$ est la densité volumique de charges.
$\vec{j}(\vec{r}, t)$ est le vecteur densité volumique de courants.

Cette équation exprime la *conservation de la charge totale* du conducteur.

4. La forme locale du théorème d'Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 . \vec{j}$$

D'où

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = div(\mu_0 . \vec{j}) = \mu_0 . div(\vec{j})$$

Comme

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right) = 0$$

Donc

$$div(\vec{j}) = 0$$

On est bien dans le régime stationnaire.