FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE VI – ÉLECTROMAGNETISME

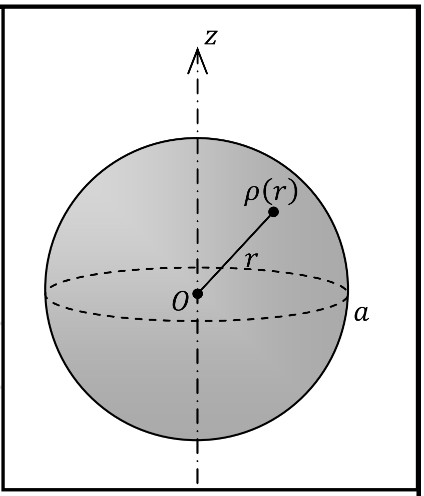
Nom et Prénom : John Doe	Signature :	Note : /20

Exercice 01 : Champ électrostatique (10 points)

Une sphère de rayon a est chargée en volume avec une distribution :

$$\rho(r) = \frac{\lambda_0}{r^2}$$

Tel que r est la distance par rapport au centre de la sphère, et λ_0 est une constante.



1. Déterminer la charge totale Q_{tot} de la sphère.

$$dq = \rho . d\tau = \frac{\lambda_0}{r^2} r^2 . \sin\theta . dr d\theta d\varphi \quad \text{pour} \quad 0 \le r \le a$$

D'où

$$Q_{\text{tot}} = \int dq = \lambda_0 \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta . dr d\theta d\varphi$$

$$Q_{\text{tot}} = \lambda_0 \int_0^a dr \int_0^\pi \sin\theta . d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \lambda_0 [r]_0^a [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi}$$

Et

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = 4\pi\lambda_0 a}$$

2. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le vecteur champ électrostatique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace.

La densité de charge ne dépend que de r, la symétrie est sphérique

Le champ en un point quelconque de l'espace est donc radial $\boxed{\vec{E}(r) = E_r . \vec{e}_r}$

Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon r.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Comme $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_G} E . ds$$

En utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que $E = \text{Constante}$ (en module) sur la surface de GAUSS S_G

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E . S_G$$

Nous obtenons donc : $\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E . 4\pi . r^2}$

Champ à l'intérieur de la sphère $0 \le r \le a$ *:*

Distribution volumique non uniforme $dq = \rho . d\tau$

$$\sum Q_{\text{int}} = \int dq = \lambda_0 \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \,.\, dr d\theta d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sum Q_{\text{int}} = 4\pi\lambda_0 . r$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{4\pi\lambda_0}{\varepsilon_0} r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{int}}(r) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{e}_r}$$

Champ à l'extérieur de la sphère $a \le r < +\infty$ *:*

$$\sum Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}} = 4\pi\lambda_0 a$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{4\pi\lambda_0 a}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\lambda_0 a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r}$$

3. Vérifier que $div(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$ en tout point de l'espace.

Pour un champ de symétrie sphérique (radial) $E_\theta = E_\varphi = 0$ *donc*

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r}E_r$$

A l'intérieur de la sphère $0 \le r \le a$ *:*

$$div(\vec{E}_{\text{int}}) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) = -\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} + 2\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

A l'extérieur de la sphère $a \le r < +\infty$ *:*

$$div(\vec{E}_{\text{ext}}) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda_0 a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\lambda_0 a}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right) = -2\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} + 2\frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} = 0 = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\varepsilon_0}$$

4. Que peut-on dire, dans ce cas, sur la continuité du champ électrostatique ?

Le champ est continu à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère

Vérifions sa continuité en $r = a$

$$\vec{E}_{\text{int}}(a) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{a}\vec{e}_r \quad et \quad \vec{E}_{\text{ext}}(a) = \frac{\lambda_0 a}{\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{e}_r \quad donc \quad \vec{E}_{\text{int}}(a) = \vec{E}_{\text{ext}}(a)$$

Le champ est continu en tout point de l'espace car la distribution est volumique

Remarque : Toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de $\varepsilon_0, a, \lambda_0$ et r.

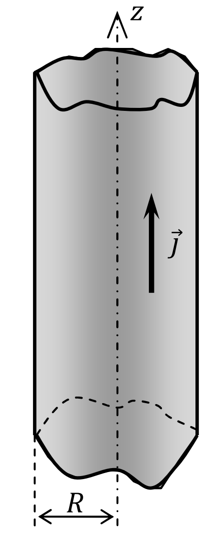
On donne en coordonnées sphériques :

$$d\tau = r^2 . \sin\theta \,.\, dr . d\theta . d\varphi$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r}A_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r.\tan\theta}A_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Nom et Prénom : John Doe	Signature :

Exercice 02 : Champ magnétostatique (10 points)



Soit un conducteur cylindrique droit de rayon R et de longueur infinie, parcouru par une densité volumique de courant

$$\vec{j} = \frac{A}{\rho}\vec{e}_z$$

ρ étant la distance par rapport à l'axe du cylindre (Oz) et A une constante positive.

1. Vérifier que cette distribution de courant est stationnaire.

Calculons $div(\vec{j})$

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} j_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Comme $j_\rho = j_\varphi = 0$

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{\rho}\right) = 0$$

D'où la distribution de courants est stationnaire

2. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le vecteur champ magnétostatique $\vec{B}(\rho)$ en tout point de l'espace.

Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont des plans de symétrie

Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie

étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie, alors : $\vec{B} = B_\varphi.\vec{e}_\varphi$

En utilisant le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \mu_0.\sum I_{\text{int}}$$

La boucle choisie est un cercle de rayon ρ centrée sur l'axe du cylindre

En coordonnées cylindriques $d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \int_C (B_\varphi.\vec{e}_\varphi)\bullet(d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z) = \rho\int_0^{2\pi} B_\varphi.d\varphi$$

En utilisant la symétrie de rotation autour de l'axe du courant

B_φ est constant sur la boucle

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \rho.B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho.B_\varphi$$

Champ à l'intérieur du cylindre $0 \le \rho \le R$:

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint \left(\frac{A}{\rho}.\vec{e}_z\right) \bullet (ds.\vec{e}_z) = \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{A}{\rho} \rho d\rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = 2\pi A.\rho$$

En remplaçant, nous trouvons

$$2\pi\rho.B_\varphi = \mu_0.2\pi A.\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{\text{int}}(\rho) = \mu_0 A.\vec{e}_\varphi}$$

Champ à l'extérieur du cylindre $R \le \rho < +\infty$:

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \bullet d\vec{s} = \iint \left(\frac{A}{\rho}.\vec{e}_z\right) \bullet (ds.\vec{e}_z) = \int_0^{R} \int_0^{2\pi} \frac{A}{\rho} \rho d\rho d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = 2\pi A.R$$

En remplaçant, nous trouvons

$$2\pi\rho.B_\varphi = \mu_0.2\pi A.R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{\text{ext}}(\rho) = \mu_0 A \frac{R}{\rho} \vec{e}_\varphi}$$

3. Vérifier que $rot(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j}$ en tout point de l'espace.

Pour un champ de symétrie cylindrique $B_\rho = B_z = 0$ *donc*

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \left(-\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} B_\varphi\right)\vec{e}_z$$

A l'intérieur du cylindre $0 \le \rho \le R$:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}_{\text{int}}) = \left(-\frac{\partial(\mu_0 A)}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial(\mu_0 A)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\mu_0 A\right)\vec{e}_z = \mu_0 \frac{A}{\rho}\vec{e}_z = \mu_0.\vec{j}_{\text{int}}$$

A l'extérieur du cylindre $R \le \rho < +\infty$:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}_{\text{ext}}) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_0 A \frac{R}{\rho}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\mu_0 A \frac{R}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\mu_0 A \frac{R}{\rho}\right)\right)\vec{e}_z = \left(-\mu_0 A \frac{R}{\rho^2} + \mu_0 A \frac{R}{\rho^2}\right)\vec{e}_z = \vec{0} = \mu_0.\vec{j}_{\text{ext}}$$

4. Que peut-on dire, dans ce cas, sur la continuité du champ magnétostatique ?

Le champ est continu à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre

Vérifions sa continuité en $\rho = R$

$$\vec{B}_{\text{int}}(R) = \mu_0 A.\vec{e}_\varphi \quad et \quad \vec{B}_{\text{ext}}(R) = \mu_0 A.\vec{e}_\varphi \quad donc \quad \vec{B}_{\text{int}}(R) = \vec{B}_{\text{ext}}(R)$$

Le champ est continu en tout point de l'espace car la distribution est volumique

Remarque : Toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de μ_0, R, A et ρ.

On donne en coordonnées cylindriques :

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho - \left(\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$