الفصل الثالث: النمذجة الخطية للسلاسل الزمنية

نهدف من خلال هذا الفصل إلى بناء نماذج خطية للظاهرة المدروسة بغرض استعمالها في ميدان التوقع، و يكون هذا على أساس شرح و تفسير السلسلة المدروسة بالاعتماد على خصائصها المهمة و المتمثلة في ماضيها المدروس، و يعتبر شرط استقرارية السلسلة شرط ضروري للقيام بعملية النمذجة.

1. نماذج الانحدار الذاتي $AR(p)$

نقول عن السلسلة Y_t بأنها تخضع لصيرورة انحدار ذاتي من الدرجة p إذا أمكن كتابة القيمة الحالية للسلسلة على أساس دالة خطية للقيم السابقة للسلسلة $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, ..., Y_{t-p})$، و نكتب النموذج على النحو التالي:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \zeta_t$$

حيث أن: ζ_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\zeta_t \to BBN\left(0, \sigma_\zeta^2\right)$

ϕ_0 تمثل الحد الثابت و $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$ تمثل معاملات النموذج و التي تحدد اثر القيم السابقة للسلسلة على القيمة الحالية أي أنها تصف ذاكرة السلسلة.

مثال1

نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الأولى $AR(1)$: $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \zeta_t$

نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الثانية $AR(2)$: $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \zeta_t$

وعادة ما يفسر نموذج الانحدار الذاتي بواسطة معامل التأخير L حيث أن: $L^d Y_t = Y_{t-d}$

ونكتب:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 L Y_t + \phi_2 L^2 Y_t + ... + \phi_p L^p Y_t + \zeta_t$$

$$Y_t - \phi_1 L Y_t - \phi_2 L^2 Y_t - ..... - \phi_p L^p Y_t = \phi_0 + \zeta_t$$

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ..... - \phi_p L^p\right) Y_t = \phi_0 + \zeta_t$$

$$\phi_p(L)\ Y_t = \phi_0 + \zeta_t$$

حيث أن:

$$\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2{}_t - ..... - \phi_p L^p$$

2. نماذج المتوسطات المتحركة $MA(q)$

نقول عن السلسلة Y_t بأنها تخضع لصيرورة متوسط متحرك من الدرجة q إذا أمكن شرح و تفسير القيمة الحالية للسلسلة على أساس متوسط مرجح للقيم السابقة للأخطاء العشوائية $(\zeta_{t-1}, \zeta_{t-2}, ..., \zeta_{t-q})$، و نكتب النموذج على النحو التالي:

$$Y_t = \theta_0 - \theta_1 \zeta_{t-1} - \theta_2 \zeta_{t-2} - ..... - \theta_q \zeta_{t-q} + \zeta_t$$

حيث أن: ζ_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\zeta_t \to BBN\left(0, \sigma_\zeta^2\right)$

θ_0 تمثل الحد الثابت و $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q)$ تمثل معاملات النموذج و التي تحدد اثر القيم السابقة للبواقي على القيمة الحالية للسلسلة، أي اثر الصدمات العشوائية على قيم السلسلة المدروسة.

مثال2

نموذج متوسط متحرك من الدرجة الأولى $MA(1)$: $Y_t = \theta_0 - \theta_1 \zeta_{t-1} + \zeta_t$

نموذج متوسط متحرك من الدرجة الثانية $MA(2)$: $Y_t = \theta_0 - \theta_1 \zeta_{t-1} - \theta_2 \zeta_{t-2} + \zeta_t$

و يمكننا كتابة نموذج المتوسطات المتحركة باستعمال معامل التأخير L حيث أن: $L^d \zeta_t = \zeta_{t-d}$ ، ونكتب:

$$Y_t = \theta_0 - \theta_1 L \zeta_t - \theta_2 L^2 \zeta_t - ..... - \theta_q L^q \zeta_t + \zeta_t$$

$$Y_t = \theta_0 + \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - ..... - \theta_q L^q\right)\zeta_t$$

$$Y_t = \theta_0 + \theta_q(L)\zeta_t$$

حيث أن: $$\theta_q(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - ..... - \theta_q L^q$$

3. نماذج الانحدار الذاتي للأوساط المتحركة $ARMA(p,q)$

نقول عن السلسلة Y_t بأنها تخضع لصيرورة مختلطة بين المتوسطات المتحركة و الانحدار الذاتي إذا كان:

$$Y_t = \gamma + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} - \theta_1 \zeta_{t-1} - \theta_2 \zeta_{t-2} - ..... - \theta_q \zeta_{t-q} + \zeta_t$$

حيث أن: ζ_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\zeta_t \to BBN\left(0, \sigma_\zeta^2\right)$

γ تمثل الحد الثابت و $\left[(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p), (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q)\right]$ تمثل معاملات النموذج .

مثال3

نموذج $ARMA(1,1)$: $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 \zeta_{t-1} + \zeta_t$

نموذج $ARMA(2,1)$: $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \theta_1 \zeta_{t-1} + \zeta_t$

لاحظ أن: $ARMA(0,1) \equiv MA(1)$ وكذلك $ARMA(1,0) \equiv AR(1)$

و يمكننا كتابة نموذج الانحدار الذاتي للأوساط المتحركة باستعمال معامل التأخير على النحو التالي:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - ..... - \phi_p Y_{t-p} = \gamma + \zeta_t - \theta_1 \zeta_{t-1} - \theta_2 \zeta_{t-2} - ..... - \theta_q \zeta_{t-q}$$

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ..... - \phi_p L^P\right) Y_t = \gamma + \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - ..... - \theta_q L^q\right) \zeta_t$$

$$\phi_p(L)\ Y_t = \gamma + \theta_q(L)\ \zeta_t$$

4. دراسة الاستقرارية و القابلية للقلب في نماذج الانحدار الذاتي و الأوساط المتحركة

1.4. دراسة الاستقرارية و القابلية للقلب في نماذج الأوساط المتحركة

A. دراسة الاستقرارية في الأوساط المتحركة

حتى يكون نموذج $MA(q)$ مستقر يجب أن يحقق شروط الاستقرارية و هي ثبات المتوسط، التباين و التباين المشترك بالنسبة للزمن. و نكتب $MA(q)$ على النحو التالي:

$$Y_t = \theta_0 + \theta_q(L)\zeta_t$$

حيث أن: ζ_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\zeta_t \to BBN\left(0,\sigma_\zeta^2\right)$

وعلى اعتبار أن Y_t هي مجموع سلاسل مستقرة ζ_t يمنحنا سلسلة مستقرة، يمكننا القول أن نماذج الأوساط المتحرك مستقرة بالتعريف لأنها مجموع لصدمات عشوائية.

B. قابلية نماذج الأوساط المتحركة للقلب

إن مفهوم القابلية للقلب هي دراسة الشروط الضرورية للانتقال من نماذج الأوساط المتحركة إلى نماذج الانحدار الذاتي، و بصفة عامة يمكننا القول حتى يكون نموذج المتوسط المتحرك $MA(q)$ قابل للقلب يجب أن تكون جذور كثير الحدود $\theta_q(L)$ تقع خارج الدائرة الوحدوية أي أكبر من الواحد. آو مقلوب كل الجذور لكثير الحدود $\theta_q(L)$ تقع داخل دائرة الوحدة، ويمكننا عندئذ أن نكتب:

$$\theta_q^{-1}(L)y_t = \zeta_t$$

2.4. دراسة الاستقرارية و القابلية للقلب في نماذج الانحدار الذاتي

A. قابلية نماذج الانحدار الذاتي للقلب

نقصد بالقابلية للقلب هي تحويل نموذج الانحدار الذاتي إلى نموذج المتوسطات المتحركة، و إذا افترضنا كمثال عن ذلك نموذج للانحدار الذاتي من الدرجة الأولى $AR(1)$ ، ونكتب:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \zeta_t$$

يكون من اجل $(t-1)$:

$$Y_{t-1} = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-2} + \zeta_{t-1}$$

نعوض في معادلة $AR(1)$ نجد أن:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_0\phi_1 + \phi_1^2 Y_{t-2} + \phi_1\zeta_{t-1} + \zeta_t$$

من اجل $(t-2)$ لدينا:

$$Y_{t-2} = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-3} + \zeta_{t-2}$$

نعوض في معادلة $AR(1)$ نجد أن:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_0\phi_1 + \phi_0\phi_1^2 + \phi_1^3 Y_{t-3} + \phi_1^2\zeta_{t-2} + \phi_1\zeta_{t-1} + \zeta_t$$

بتكرار هذه العملية يكون:

$$Y_t = \phi_0\left(1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \dots + \phi_1^n\right) + \zeta_t + \phi_1\zeta_{t-1} + \phi_1^2\zeta_{t-2} + \dots + \phi_1^n\zeta_{t-n} + \phi_1^{n+1}Y_0$$

حيث أن Y_0 تمثل المشاهدة الأولى في السلسلة Y_t .

و العبارة الأخيرة تعني أن Y_t هي متوسط متحرك لا نهائي $MA(\infty)$ ، و نكتب:

$$AR(1) \rightarrow MA(\infty)$$

و بتعميم هذه النتيجة من اجل درجات p يمكننا القول أن كل نماذج الانحدار الذاتي $AR(p)$ هي نماذج قابلة للقلب بالتعريف. ونكتب:

$$\phi_p(L)\ Y_t = \phi_0 + \zeta_t$$

إذا كانت y_t هي إزاحة Y_t عن المتوسط μ أي: $y_t = Y_t - \mu$

نكتب: $$\phi_p(L)\ y_t = \zeta_t$$

و عليه فان: $$y_t = \phi_p^{-1}(L)\ \zeta_t$$

B. دراسة الاستقرارية في نماذج الانحدار الذاتي

حتى يكون نموذج $AR(p)$ مستقر يجب أن يحقق شروط الاستقرارية و هي ثبات المتوسط، التباين و التباين المشترك بالنسبة للزمن. و نكتب $AR(p)$ على النحو التالي:

$$\phi_p(L)\ Y_t = \phi_0 + \zeta_t$$

حيث أن: ζ_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\zeta_t \rightarrow BB\left(0, \sigma_\zeta^2\right)$

و عليه يمكننا القول حتى يكون نموذج الانحدار الذاتي $AR(p)$ مستقر يجب أن يكتب على شكل نموذج لصدمات عشوائية نهائي إي يجب أن تكون جذور كثير الحدود $\phi_p(L)$ أكبر من الواحد أي تقع خارج الدائرة الوحدوية آو مقلوب الجذور يقع داخل الدائرة الوحدوية.

ملاحظة

إن شروط الاستقرارية و القابلية للقلب بالنسبة لنماذج $ARMA(p,q)$ هي الشروط السابقة للقلب في نماذج $MA(q)$ و شروط الاستقرارية في نماذج $AR(p)$. و عليه يتم تحويل نماذج $ARMA(p,q)$ إلى نماذج الانحدار الذاتي AR فقط، و نكتب:

$$\phi_p(L)\ y_t = \theta_q(L)\ \zeta_t$$

يكون:

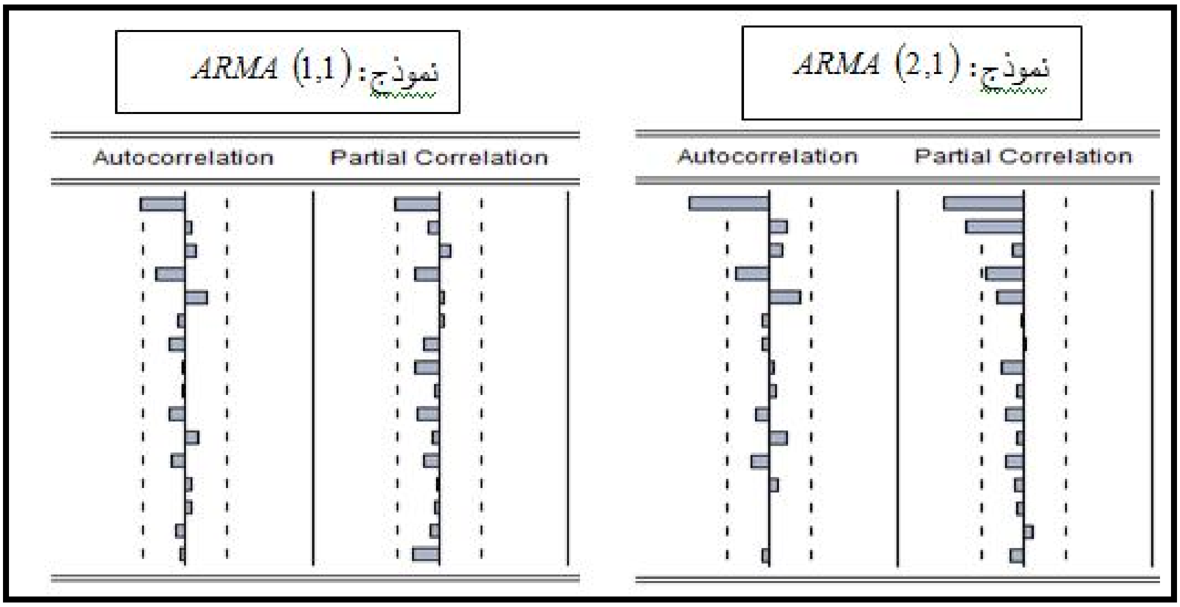
$$\theta_q(L)^{-1}\phi_p(L)\ y_t = \zeta_t$$

5. تحديد قيم التأخيرات p و q في نماذج $ARMA$

بغرض معرفة نوع نموذج السلسلة المدروسة هل هو انحدار ذاتي، أوساط متحركة أو نموذج مختلط و كذلك تحديد قيم التأخيرات p و q نعتمد على دالتي الارتباط الذاتي البسيطة و الجزئية للسلسلة المستقرة، و الجدول التالي يوضح ذلك:

نوع النموذج	دالة الارتباط الذاتي FAC	دالة الارتباط الذاتي الجزئي FACP
$AR(1)$	------------------	قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي من اجل التأخير الأول غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_{11} \neq 0 \quad \wedge \quad r_{hh} = 0 \quad ,h \succ 1$
$AR(2)$	---------------------	قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي من اجل التأخيرات الأول و الثاني غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_{11} \neq 0 \wedge r_{22} \neq 0 \quad \wedge \quad r_{hh} = 0 \quad ,h \succ 2$
$AR(p)$	--------------------	قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي من اجل التأخيرات (p) غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_{pp} \neq 0 \quad \wedge \quad r_{hh} = 0 \quad ,h \succ p$
$MA(1)$	قيمة دالة الارتباط الذاتي من اجل التأخير الأول غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_1 \neq 0 \quad \wedge \quad r_h = 0 \quad ,h \succ 1$	------------------
$MA(2)$	قيمة دالة الارتباط الذاتي من اجل التأخيرات الأول و الثاني غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_1 \neq 0 \wedge r_2 \neq 0 \quad \wedge \quad r_h = 0 \quad ,h \succ 2$	--------------------
$MA(q)$	قيمة دالة الارتباط الذاتي من اجل التأخيرات (q) غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_p \neq 0 \quad \wedge \quad r_h = 0 \quad ,h \succ q$	---------------------
$ARMA(1,1)$	قيمة دالة الارتباط الذاتي من اجل التأخير الأول غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_1 \neq 0 \quad \wedge \quad r_h = 0 \quad ,h \succ 1$	قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي من اجل التأخير الأول غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_{11} \neq 0 \quad \wedge \quad r_{hh} = 0 \quad ,h \succ 1$
$ARMA(p,q)$	قيمة دالة الارتباط الذاتي من اجل التأخيرات (q) غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_p \neq 0 \quad \wedge \quad r_h = 0 \quad ,h \succ q$	قيمة دالة الارتباط الذاتي الجزئي من اجل التأخيرات (p) غير معدومة أما لبقية التأخيرات فهي معدومة $r_{pp} \neq 0 \quad \wedge \quad r_{hh} = 0 \quad ,h \succ p$

مثال4



6. نماذج الانحدار الذاتي للأوساط المتحركة المتكاملة $ARIMA(p,d,q)$

إن النماذج السابقة: $AR(p)$ ، $MA(q)$ و $ARMA(p,q)$ يتم تقديرها فقط في حالة إذا كانت السلسلة المدروسة Y_t مستقرة، أما إذا كانت السلسلة غير مستقرة فيجب جعلها مستقرة قبل البدء في عملية نمذجتها. فإذا كانت Y_t غير مستقرة و من نوع DS متكاملة من الدرجة d أي أنها مستقرة عند الفرق d يمكننا نمذجتها عندئذٍ، و نكتب:

$$w_t = \nabla^d Y_t \rightarrow ARMA(p,q)$$

يكون:

$$Y_t \rightarrow ARIMA(p,d,q)$$

مثال5

إذا كانت Y_t مستقرة عند الفرق الأول فان:

$$w_t = \Delta\ Y_t \rightarrow ARMA(p,q)$$

يكون:

$$Y_t \rightarrow ARIMA(p,1,q)$$