Polycopié de cours

PHYSIQUE STATISTIQUE

Master 1 Physique des Matériaux
Master 1 Physique Energétique et Energies Renouvelables

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE I

NOTIONS DE PROBABILITÉ

I. CALCUL COMBINATOIRE 2
II. PROBABILITÉS DISCRÈTES 3
III. VARIABLES ALÉATOIRES ET MOYENNE 5
IV. VARIANCE ET ÉCART TYPE 6
V. PROBABILITÉS CONTINUES 8
VI. DISTRIBUTION GAUSSIENNE 9
VII. THÉORÈME CENTRAL LIMITE 9

NOTIONS DE PROBABILITÉ

I. CALCUL COMBINATOIRE

LA MULTIPLICATION

Si nous avons N Systèmes (ou objets) ayant chacun Q_i configurations pouvant se faire de manière indépendante, alors le **nombre total de configurations** est

$$\Omega = \prod_{i=1}^{N} Q_i$$

En particulier, si les N Systèmes (ou objets) ont le même nombre de configurations (indépendantes) Q, alors le nombre total de configurations est $\Omega = Q^N$.

Exemple : Une pièce, deux pièces, N pièces, une pièce et un dé, p pièces et q dés.

LA FACTORIELLE

Dans le cas où nous avons N objets à ordonner (classer dans un ordre quelconque), le nombre total de configurations est

$$\Omega = N!$$

La **formule de Stirling** pour les grands nombres $(N \gg 1)$ s'écrit $\ln(N!) \approx N.\ln N - N$.

Exemple : Classement total.

LES ARRANGEMENTS

De combien de manière pouvons-nous choisir k objets parmi N, sachant que nous pouvons distinguer les k objets entre eux ? Dans ce cas le nombre total de configurations est

$$\Omega = A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}$$

Exemple : Tiercé.

LES COMBINAISONS

De combien de manière pouvons-nous choisir k objets parmi N, sachant que nous ne pouvons pas distinguer les k objets entre eux ? Le nombre de configurations possible est

$$\Omega = C_N^k = \frac{N!}{k!.(N-k)!}$$

Notée aussi $\binom{N}{k}$ et appelée coefficient binomial ou binomiale.

La formule de Stirling pour $N \gg 1$, $k \gg 1$ et $(N-k) \gg 1$ donne

$$\ln\left(C_N^k\right) \approx N.\ln N - k.\ln k - (N-k).\ln(N-k)$$

Propriétés :

- $C_N^0 = C_N^N = 1$
- $C_N^1 = C_N^{N-1} = N$
- $C_N^k = C_N^{N-k}$
- $C_N^k = C_{N-1}^{k-1} + C_{N-1}^k$

Exemple : Loto.

II. PROBABILITÉS DISCRÈTES

On dit d'un **phénomène** qu'il est **aléatoire**, si nous sommes dans l'incapacité de prédire avec certitude son résultat même si nous le reproduisons autant de fois que nous le voulons dans les mêmes conditions.
Soit une expérience concernant un phénomène aléatoire. Cette expérience peut avoir plusieurs **résultats possibles** (numériques ou non).
Chaque fois qu'on répète l'expérience on fait un **tirage**.
Un **événement** est une propriété (qu'elle soit réalisée ou non) du résultat d'un tirage.

Exemple : Un dé à jouer, une pièce de monnaie.

La probabilité d'un événement est donnée par le rapport entre le nombre de tirages ou l'événement est réalisée et le nombre de tirages total dans le cas d'un très grand nombre de tirages.

$$0 \leq \mathrm{Proba}(\text{événement}) \leq 1$$

$$\sum_{\text{résultats possibles}} \mathrm{Proba}(\text{résultat}) = 1$$

- La probabilité d'un **événement sûr** est égale à 1.
- La probabilité d'un **événement impossible** est égale à 0.

Deux événements A et B sont dit **incompatibles** s'il nous est impossible de les réaliser en même temps (même tirage).

$$\mathrm{Proba}(\mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B}) = 0$$

Un **groupe complet d'événements incompatibles**, est un ensemble d'événement incompatibles entre eux (deux à deux) mais dont la réalisation de l'un de ces événements est certaine. Dans le cas d'un groupe complet de deux événements incompatibles

$$\mathrm{Proba}(\mathrm{A} \text{ ou } \mathrm{B}) = \mathrm{Proba}(\mathrm{A}) + \mathrm{Proba}(\mathrm{B}) = 1$$

Deux événements ayant la même probabilité de réalisation sont dit **équiprobables**.

$$\mathrm{Proba}(\mathrm{A}) = \mathrm{Proba}(\mathrm{B})$$

A partir des définitions précédentes et pour un groupe complet de n événements incompatibles et équiprobables, la probabilité de chaque événement est égale à $(1/n)$.

Deux événements sont dit **indépendants** si la probabilité de réalisation d'un des événements n'influe pas sur la probabilité de réalisation de l'autre.

Donc, pour deux événements A et B indépendants :

$$\mathrm{Proba}(\mathrm{A} \text{ et } \mathrm{B}) = \mathrm{Proba}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Proba}(\mathrm{B})$$

Remarque :
Dans le **cas général**

$$\mathrm{Proba(A\ ou\ B)} = \mathrm{Proba(A)} + \mathrm{Proba(B)} - \mathrm{Proba(A\ et\ B)}$$

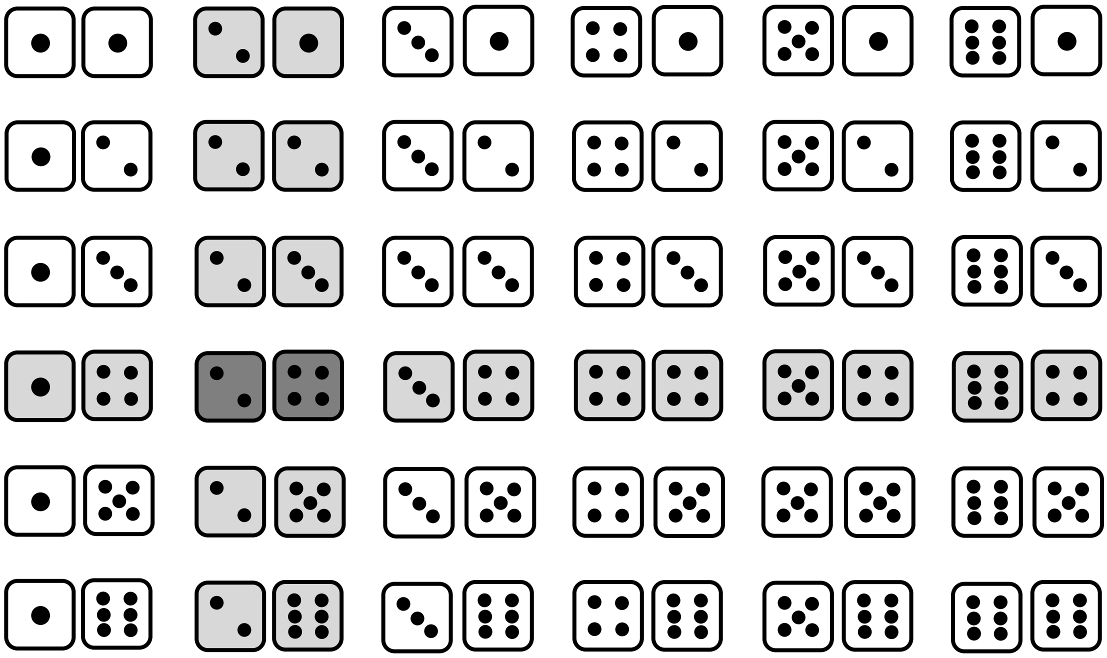
Pour deux événements **incompatibles** nous retrouvons

$$\mathrm{Proba(A\ ou\ B)} = \mathrm{Proba(A)} + \mathrm{Proba(B)}$$

Et pour deux événements **indépendants**

$$\mathrm{Proba(A\ ou\ B)} = \mathrm{Proba(A)} + \mathrm{Proba(B)} - \mathrm{Proba(A)} \times \mathrm{Proba(B)}$$

Exemple :
Nous lançons deux dés à jouer et nous lisons leurs faces supérieures sachant que nous pouvons distinguer les deux dés. Nous avons alors 36 résultats possibles.



Evénement A : Le dé de droite donne un « quatre ».
Evénement B: La somme des deux dés donne « trois ».
Evénement C : Le dé de gauche donne un « deux ».

Les événements A et B sont incompatibles : $\mathrm{Proba(A\ et\ B)} = 0$
Les événements A et C sont indépendants :

$$\mathrm{Proba(A\ et\ C)} = \mathrm{Proba(A)} \times \mathrm{Proba(C)} = \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$$

Et

$$\mathrm{Proba(A\ ou\ C)} = \mathrm{Proba(A)} + \mathrm{Proba(C)} - \mathrm{Proba(A)} \times \mathrm{Proba(C)}$$

$$\mathrm{Proba(A\ ou\ C)} = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

LOI BINOMIALE

Soit une expérience concernant un phénomène aléatoire donné. Notons la probabilité pour qu'un événement A se réalise lors d'un tirage $\mathrm{Proba(A)} = p$. Si nous effectuons N tirages successifs et indépendants, alors la probabilité pour que l'événement A se réalise k fois est donné par la loi binomiale

$$P(k) = C_N^k . p^k . (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!.(N-k)!} p^k . (1-p)^{N-k}$$

En effet, il existe C_N^k façons d'obtenir k réalisations parmis N tirages (l'ordre étant indifférent), la probabilité des k tirages étant p^k et la probabilité des $(N-k)$ tirages restant étant $(1-p)^{N-k}$.

Exemples :
Nous lançons 4 fois une pièce de monnaie. Quelle probabilité avons-nous d'obtenir 2 piles ?
Nous lançons un dé à jouer 4 fois. Quelle probabilité avons-nous d'obtenir 2 fois 3 ?

La somme sur toutes ces probabilités, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir n'importe quel nombre de résultats où A est réalisé, est évidemment égale à l'unité

$$\sum_{k=0}^{k=N} C_N^k . p^k . (1-p)^{N-k} = \left(p + (1-p)\right)^N = 1$$

III. VARIABLES ALÉATOIRES ET MOYENNE

On note X le résultat d'un tirage ou événement, ce résultat étant une **valeur numérique**, X est alors appelée variable aléatoire.
La probabilité pour que le résultat d'un tirage donne une valeur x parmi les résultats possibles, est dite probabilité pour que la variable aléatoire X prenne la valeur x et elle est notée $p_X(x)$. Et la normalisation s'écrit

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

Probabilité jointe $p_{X,Y}(x,y)$: c'est la probabilité pour que la variable X prenne la valeur x et que la variable Y prenne la valeur y. La normalisation s'écrit alors :

$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$$

D'autre part

$$\sum_x p_{X,Y}(x,y) = p_Y(y) \qquad \text{et} \qquad \sum_y p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires (événements) indépendantes alors :

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x).p_Y(y)$$

La valeur moyenne de la variable aléatoire X est donné par :

$$\bar{X} = \sum_x x.p_X(x)$$

La valeur moyenne de X^2 est

$$\overline{X^2} = \sum_x x^2.p_X(x)$$

En général la valeur moyenne d'une fonction $F(X)$ de cette variable aléatoire est donné par :

$$\bar{F}(X) = \sum_x F(x).p_X(x)$$

Exemple : Un dé à jouer.

Propriétés :
X est une variable aléatoire et λ est une constante, alors :

- $\bar{\lambda} = \lambda$
- $\overline{\lambda.X} = \lambda.\bar{X}$
- $\overline{X+Y} = \bar{X} + \bar{Y}$
- $\overline{X.Y} = \bar{X}.\bar{Y}$ uniquement pour deux variables indépendantes.

IV. VARIANCE ET ÉCART TYPE

Parfois nous avons besoin de savoir l'écart entre les valeurs que peut prendre une variable aléatoire et sa moyenne. Il est clair que la moyenne de ces écarts est nulle ($\overline{X - \bar{X}} = \bar{X} - \bar{X} = 0$, $\bar{X}$ étant un nombre constant), donc, pour avoir une grandeur indiquant cet écart et qui ne soit pas nulle nous calculons la variance donnée par la relation :

$$Var(X) = \overline{(X - \bar{X})^2}$$

L'écart quadratique moyen (ou écart type) est la racine carré de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}}$$

On peut réécrire la variance et l'écart type sous la forme :

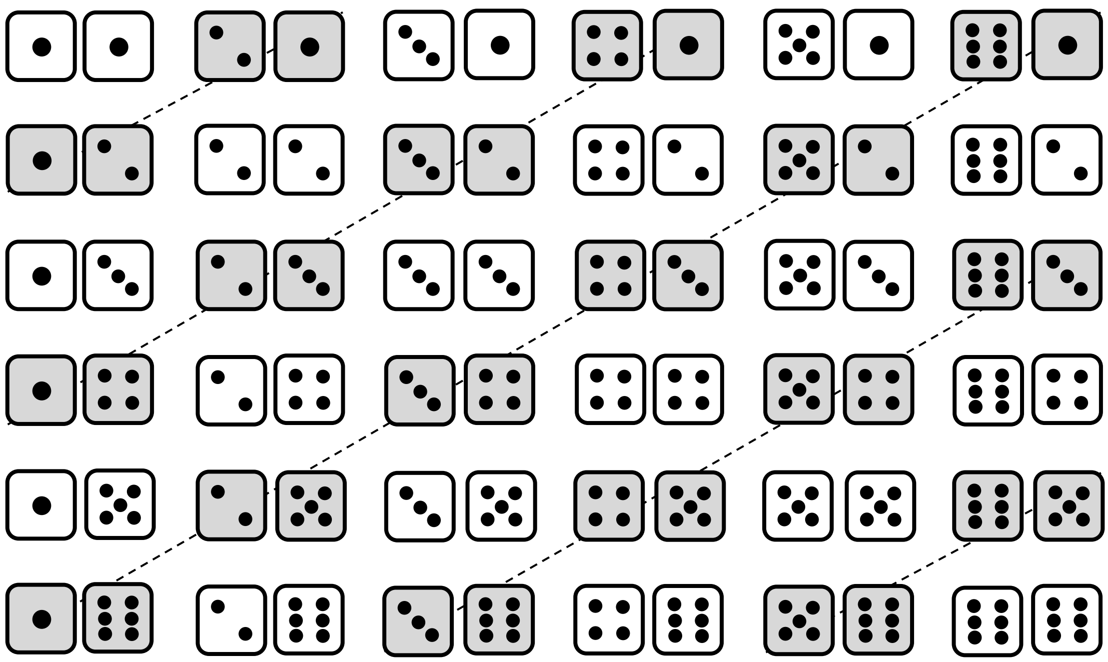
$$Var(X) = \overline{X^2} - \bar{X}^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$$

Propriétés :
X est une variable aléatoire et λ est une constante, alors :

- $Var(\lambda + X) = Var(X)$
- $Var(\lambda.X) = \lambda^2.Var(X)$
- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ uniquement pour deux variables indépendantes.

Exemple :
Nous prenons la somme de deux dés à jouer jetés au hasard.
Les résultats possibles et leurs probabilités sont donnés par le tableau suivant

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	6/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



La valeur moyenne de la somme de deux dés est donnée par

$$\bar{X} = \sum_{x=2}^{12} x.p_X(x)$$

$$\bar{X} = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36}$$

$$\bar{X} = 7$$

La valeur moyenne du carré de la somme de deux dés

$$\overline{X^2} = \sum_{x=2}^{12} x^2.p_X(x) = \frac{1974}{36}$$

D'où la variance

$$Var(X) = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{210}{36}$$

Et l'écart quadratique moyen

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{210}}{6}$$

V. PROBABILITÉS CONTINUES

La variable aléatoire X peut prendre des valeurs continues, par exemple : la longueur ou le poids d'un homme pris au hasard, la distance du point de chute d'une flèche par rapport à une cible donné, le temps d'une conversation téléphonique prise au hasard…

Dans ce cas, la probabilité $dp_X(x)$ d'obtenir un résultat de X compris entre x et $x + dx$ est donnée par :

$$dp_X(x) = \rho_X(x).dx$$

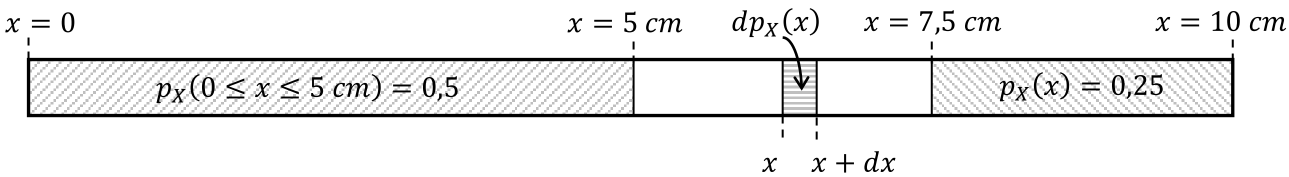
Et la probabilité $p_X(x_1 \leq x \leq x_2)$ d'obtenir un résultat de X compris entre x_1 et x_2 est

$$p_X(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho_X(x).dx$$

$\rho_X(x)$ est appelée **densité de probabilité** ou **fonction de distribution des probabilités**.

Exemple :

Nous notons un point au hasard sur une bande de 10 cm de longueur et nous mesurons la distance par rapport au bord de la bande.



Dans le cas où nous considérons que la distribution de probabilité est uniforme, une simple règle de trois nous donne

$$p_X(0 \leq x \leq 5\ cm) = 0{,}5 \qquad \text{et} \qquad p_X(7{,}5 \leq x \leq 10\ cm) = 0{,}25$$

Et en général la probabilité d'obtenir un résultat compris entre x et $x + dx$ est

$$dp_X(x) = \rho_X(x).dx = \frac{1}{10}dx \qquad \text{et} \qquad \rho_X(x) = \frac{1}{10}\ cm^{-1}$$

Remarques :

- Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on ne sait pas calculer la probabilité en un point x, mais la probabilité dans un domaine définit sur l'ensemble continue des résultats possibles de X.
- Dans le cas ou X à une dimension physique alors $\rho_X(x)$ à l'inverse de cette dimension.
- Si $\rho_X(x) = \text{constante}$ (comme dans l'exemple), on dit que la densité de probabilité, ou la distribution des probabilités, est uniforme.

La probabilité de trouver X dans l'ensemble des résultats possibles x est égale à l'unité, ce qui donne la **condition de normalisation**.

$$\int_{\text{tous les } x \text{ possibles}} \rho_X(x).dx = 1$$

Et les valeurs moyennes sont données par :

$$\bar{X} = \int_x x.\rho_X(x).dx \qquad \overline{X^2} = \int_x x^2.\rho_X(x).dx$$

VI. DISTRIBUTION GAUSSIENNE

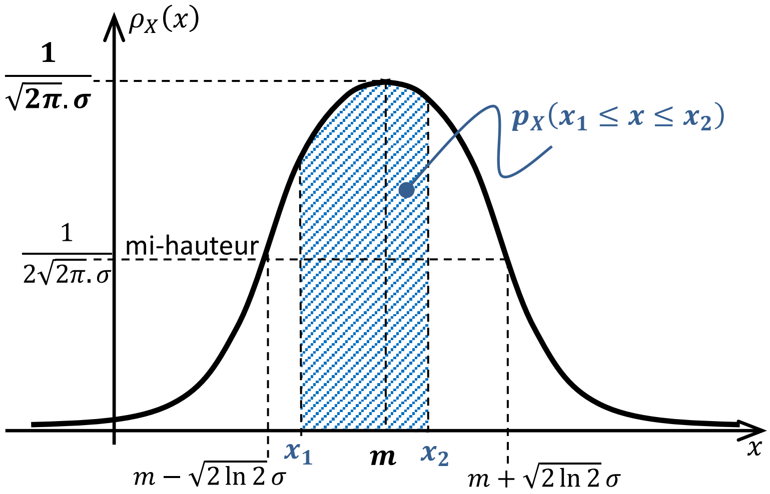
Dans une distribution gaussienne la densité de probabilité est donné par :

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

m étant la valeur moyenne de la variable aléatoire (continue).
σ est l'écart quadratique moyen.
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}$ est une constante de normalisation tel que $x \in]-\infty, +\infty[$.

La probabilité $p_X(x_1 \leq x \leq x_2)$ d'obtenir un résultat de X compris entre x_1 et x_2 est donnée par l'intégrale de $\rho_X(x)$ entre x_1 et x_2, elle est égale à l'aire sous la gaussienne (surface hachurée dans la figure ci-dessous).

Ordres de grandeurs à retenir
$p_X(m-\sigma \leq x \leq m+\sigma) = 0{,}68$
$p_X(m-2\sigma \leq x \leq m+2\sigma) = 0{,}95$
$p_X(m-3\sigma \leq x \leq m+3\sigma) = 0{,}997$
$p_X(m-4\sigma \leq x \leq m+4\sigma) = 0{,}999\ 94$



La somme de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes est aussi une variable aléatoire gaussienne.

VII. THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Soit $X_1, X_2, \ldots\ldots X_N$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité, tel que la valeur moyenne d'une de ces variables est m et son écart type est σ. Soit S la variable aléatoire donnée par la somme de ces variables $S = \sum_i X_i$ (sa valeur moyenne est égale à $N.m$ et son écart quadratique moyen est $\sqrt{N}.\sigma$). Alors, pour N très grand la variable S tend vers une distribution gaussienne.

On utilise généralement la distribution gaussienne centrée et réduite (moyenne nulle et écart type égal à l'unité)

$$Y = \frac{S - N.m}{\sigma\sqrt{N}}$$