# الفصل الثامن

# نظرية المباريات

**مدخــل:**

تعد نظرية المباراة من أكثر أساليب بحوث العمليات ملائمة للمواقف العسكرية حيث تتعلق بدراسة مواقف المنافسة والصراع.

وقد تطورت نظرية المباراة بشكل كبير بفضل أبحاث العالم Von Neuman في عام 1928 حيث برهن من خلال تحليلاته أسس نظرية المباراة وكيفية اتخاذ القرارات. إلا أن أبحاثه لم تنتشر إلا سنة 1944 بالاشتراك مع العالم Oskar Morganstern على شكل كتاب سمي "نظرية المباريات والسلوك الاقتصادي".

"Theory Of Games and Economic Behavior"

نظرية المباراة هي عبارة عن دراسة للإستراتيجيات في حالة المراهنات والمنافسة والمواجهة بين طرفين (فردين، أو شركتين، أو دولتين) أو أكثر، ويسمى كل منهم باللاعب وأمامهم فرص لاختيار بدائل متاحة لهم. إن كل بديل يؤثر على قيمة ما يحققه اللاعب الآخر من عائد، بحيث أنه يوجد تعارض في الأهداف وإن كل طرف يحاول إيقاع أكبر خسارة بالطرف الآخر. إن كل جهة تتمتع بحرية في اختيار الأسلوب والإستراتيجية التي ترى أنها تؤدي إلى نتائج جيدة لها.

أما كلمة المباراة فإنها تعني المنافسة النشطة بين جهتين أو أكثر وفقا لقاعدة محددة مسبقا. وتستخدم في المنافسة بين الشركات في تحديد أسعار المنتجات وحملات الدعاية للانتخابات السياسية وكذلك في الحروب.

وهناك أنواع من المباريات مثل الشطرنج تكون أهدافها وقواعدها معروفة للاعبين وإن خبرة اللاعب أحيانا تمكنه من التنبؤ برد الفعل بالنسبة لخصمه لإستراتيجيه معينة قد يتبعها في المباراة، ويتنافس اللاعبان ونجاح واحد منهم يكون عادة على حساب اللاعب الآخر، وكل لاعب يختار وينفذ الإستراتيجية التي يعتقد أنها تؤدي إلى كسب المباراة.

**VIII-1. قواعد المباراة:**

إن أية مباراة تحكمها الشروط الآتية:

1. عدد المشتركين يكون محدود ولا يمكن أن يكون أقل من اثنين.
2. لكل لاعب عدد محدود من البدائل المتاحة (القرارات) التي يختار بينها.
3. قرار أي لاعب يؤثر فيما يحققه من عائد وفيما يحققه المشتركون معه في المباراة من عائد.
4. العائد من جميع التباديل الممكنة لإستراتيجيات اللاعبين معلوم.
5. قرارات جميع اللاعبين تتخذ في الوقت نفسه.
6. نفترض أن يعمل المشتركين في المباراة بعقلانية ويحكمهم المنطق في تصرفهم.
7. كل طرف من أطراف المباراة يتخذ قراره باستقلالية وبدون اتصال مباشر مع الطرف الآخر.

**VIII-2. المصطلحات المستخدمة في نظرية المباراة:**

**1.المباراة:** وهي سلسلة من الخيارات التي تقود إلى نهاية المباراة.

**2. اللاعبون:** وهم الأطراف المشتركة في المباراة،أي متخذي القرارات.

**3. الإستراتيجية:** هي الخطة (أو الخطط) التي يختارها اللاعب في حركته واتخاذ قراره.

**4. الإستراتيجية الخالصة (النقية):** وتعني أن اللاعب يختار إستراتيجية معينة من استراتيجياته ويلعبها طول فترة المباراة.

**5. الإستراتيجية المختلطة:** وتعني أن اللاعب يوزع اهتمامه بين جميع ما متاح أمامه من استراتيجيات ولن يركز على إستراتيجية واحدة وسيتم استخدامه لهذه الاستراتيجيات بنسب مختلفة طوال فترة المباراة.

**6. مصفوف العائد:** وهو الجدول الذي يبين المدفوعات التي يجب على اللاعب الخاسر دفعها إلى اللاعب الرابح في نهاية المباراة.

**7. نقطة الإستقرار:** وهي أصغر قيمة من عوائد استراتيجيات اللاعب A تساوي أكبر قيم من عوائد استراتيجيات اللاعب B.

**8. قيمة المباراة (V):** وهي القيمة الناتجة من تقاطع الصف الذي يحتوي على قيمة أقصى الأدنى Maximin Value والعمود الذي يحتوي على قيمة أدنى الأقصى Minimax Value وهذه تنطبق في حالة المباراة التي تحتوي على نقطة الاستقرار.

**V = Maximin Value = Minimax Value**

**VIII-3. المباراة ذات المجموع الصفري:**

وهي مباراة بين لاعبين فقط والتي يكون فيها مجموع عوائد اللاعبين في نهاية المباراة يساوي صفر. أي أن ما يربحه اللاعب الأول يخسره اللاعب الثاني.

ولغرض توضيح المباراة بين طرفين ذات المجموع الصفري نأخذ المثال الآتي:

**مثـــال(1):**

إشترك اللاعبان A , B في مباراة معينة. اللاعب´A لديه ثلاث إستراتيجيات هي L , M , N واللاعب B لديه إستراتيجيتين وهي P,Q وكان العائد كالآتي:

**الجدول (1-VIII):**

| الاختيـــــار | العائـــــــــــــــد |
|---|---|
| L , P | A يدفع إلى B ثلاث وحدات نقدية |
| L , Q | B يدفع إلى A ثلاث وحدات نقدية |
| M , P | A يدفع إلى B وحدتين نقدية |
| M , Q | B يدفع إلى A أربع وحدات نقدية |
| N , P | B يدفع إلى A وحدتين نقديتين |
| N , Q | B يدفع إلى A ثلاث وحدات نقدية |

مصفوفة المباراة (مصفوفة العائد) تكون كالتالي:

**الجدول (2-VIII):**

| | | إستراتيجيات اللاعب B | |
|---|---|---|---|
| | | P | Q |
| إستراتيجيات اللاعب A | L | -3 | 3 |
| | M | -2 | 4 |
| | N | 2 | 3 |

تبين المصفوفة أعلاه ربح وخسارة كل من اللاعبين A , B عند استخدامه لأية إستراتيجية، حيث تمثل القيم الموجبة أرباح اللاعب A وخسائر اللاعب B.

وتمثل القيم السالبة أرباح اللاعب B وخسائر اللاعب A. تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة العائد وهي في هذا المثال 2 × 3 أي أنها تحتوي على ثلاثة صفوف وعمودين وتسمى أيضا مباراة (3×2).

ولغرض استخراج نقطة الاستقرار نتبع الخطوات الآتية:

1. نستخرج أقل قيمة في كل صف من صفوف المصفوفة وكالآتي:

**الجدول (VIII-3)**:

| | | B: P | B: Q | MIN |
|---|---|---|---|---|
| A | L | -3 | 3 | -3 |
| | M | -2 | 4 | -2 |
| | N | 2 | 3 | 2 |

2. نستخرج اكبر قيمة في كل عمود من أعمدة المصفوفة وكالآتي:

**الجدول (VIII-4)**:

| | | B: P | B: Q | MIN |
|---|---|---|---|---|
| A | L | -3 | 3 | -3 |
| | M | -2 | 4 | -2 |
| | N | 2 | 3 | 2 |
| | MAX | 2 | 4 | |

3. نحدد أكبر قيمة من القيم التي تم استخراجها في النقطة الأولى أعلاه.

**الجدول (VIII-5)**:

| | | B: P | B: Q | MIN | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | L | -3 | 3 | -3 | |
| | M | -2 | 4 | -2 | |
| | N | 2 | 3 | 2 | ← **MAX** |
| | MAX | 2 | 4 | | |

4. نحدد أصغر قيمة من القيم التي تم استخراجها في النقطة الثانية أعلاه.

<u>**الجدول (VIII-6)**</u>:

| | | B | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | P | Q | MIN | |
| A | L | -3 | 3 | -3 | |
| | M | -2 | 4 | -2 | |
| | N | 2 | 3 | 2 | **MAX** |
| | MAX | 2 | 4 | | |
| | | **MIN** | | | |

5. إذا تساوت القيمتين المستخرجتين في النقطتين (الثالثة والرابعة) فهذا يعني وجود نقطة استقرار تقطع هذين السهمين داخل المصفوفة.

وحيث أن: **V = Maximin Value = Minimax Value = 2**

هذا يعني أن المباراة مستقرة و أن نقطة الاستقرار تقع في الصف الثالــث والعمــود الأول، أي أن قيمة المباراة هي 2.

الإستراتيجية المثلى للاعب A هي: N
الإستراتيجية المثلى للاعب B هي:P

الفائز في المباراة هو **اللاعب "A"** لأن قيمة المباراة موجبة.

### VIII-4. الإستراتيجيات المهيمنة:

في حالة المصفوفات للمباريات ذات الأبعاد الكبيرة وفي حالة كون المباريات لا تحتوي على نقطــة استقرار نستطيع تحت ظروف معينة نختصر حجم المصفوفة المعطاة إلى حجم اصغر بأسلوب الهيمنة.

ويقصد بالهيمنة أنها درجة الأفضلية التي تتميز بها إستراتيجيات اللاعب A أو اللاعــب B علــى غيرها من الإستراتيجيات ولنفس اللاعب. أما الإستراتيجيات التي يتم الهيمنة عليها(المحذوفــة) فهــي الإستراتيجيات التي لا يستخدمها اللاعب مهما كانت الإستراتيجية التي يلعبها خصمه.

**تتمثل قواعد الهيمنة في:**

**1.** إذا كانت جميع العناصر في الصف H أصغر أو مساوية للعناصر المقابلة لها في صف آخــر I، فإن الصف H مهيمن عليه ويمكن حذفه.

2. إذا كانت جميع العناصر في أحد الأعمدة K اكبر أو مساوية للعناصر المقابلة لها فـــي عمـــود آخر J فإن العمود K مهيمن عليه ويمكن حذفه.
3. يمكن حذف أكثر من عمود أو أكثر من صف مهيمن عليه وجعل مصفوفة الحــل فـــي أبـــسط صورها.

نلاحظ أن عملية حذف الصفوف والأعمدة لا تؤثر على قيمة المباراة سواء كانت مستقرة أم غيـــر مستقرة أم غير مستقرة وكما هو موضح في الأمثلة الآتية:

**<u>مثـــــــال(2)</u>:**

نفرض أن لدينا المباراة الآتية:

**<u>الجدول (VIII-7)</u>:**

| | | اللاعب B (1) | اللاعب B (2) | اللاعب B (3) |
|---|---|---|---|---|
| اللاعب A | (1) | -3 | 1 | 6 |
| | (2) | 4 | 0 | 1 |
| | (3) | 3 | 2 | 3 |

**<u>الحـــــــل</u>:**

**<u>الجدول (VIII-8)</u>:**

| | | B (1) | B (2) | B (3) | MIN |
|---|---|---|---|---|---|
| A | (1) | -3 | 1 | 6 | -3 |
| | (2) | 4 | 0 | 1 | 0 |
| | (3) | 3 | 2 | 3 | 2 |
| | MAX | 4 | 2 | 6 | |

MAX ←

↑
**MIN**

نلاحظ أن المباراة مستقرة وقيمتها تساوي 2.

ولو حذفنا العمود الثالث لكون جميع قيمه أكبر من قيم العمود الثاني المناظرة نحصل على:

**الجدول (VIII-9):**

اللاعب B

| | | (1) | (2) |
|---|---|---|---|
| اللاعب A | (1) | -3 | 1 |
| | (2) | 4 | 0 |
| | (3) | 3 | 2 |

كذلك لو حذفنا الصف الأول لكون جميع قيمه أصغر من قيم الصف الثالث المناظرة نحصل على:

**الجدول (VIII-10):**

اللاعب B

| | | (1) | (2) |
|---|---|---|---|
| اللاعب | (1) | 4 | 0 |
| A | (2) | 3 | 2 |

لوجدنا أن المباراة تبقى مستقرة وتبقى قيمتها تساوي 2.

**مثـــــــال(3):**

اللاعبان B,A لكل منهما لديه ثلاث اختيارات من ثلاثة ألـــوان هـــي الأبـــيض W والأســـود B والأحمر R.

أوجد الإستراتيجيات المثلى لكل لاعب وقيمة المباراة.

**الجدول (VIII-11):**

اللاعب B

| | | W | B | R |
|---|---|---|---|---|
| اللاعب A | W | 0 | -2 | 7 |
| | B | 2 | 5 | 6 |
| | R | 3 | -3 | 8 |

**الحــــــــل**:

**الجدول (VIII-12)**:

| | | B | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | W | B | R | MIN |
| A | W | 0 | -2 | 7 | -2 |
| | B | 2 | 5 | 6 | 2 ← **MAX** |
| | R | 3 | -3 | 8 | -3 |
| | MAX | 3 | 5 | 8 | |
| | | ↑ **MIN** | | | |

نلاحظ أن المباراة غير مستقرة.

**الجدول (VIII-13)**:

| | | اللاعب B | |
|---|---|---|---|
| | | W | B |
| اللاعب A | W | 0 | -2 |
| | B | 2 | 5 |
| | R | 3 | -3 |

نقارن الصفوف، نجد أن جميع قيم الصف الأول هي أقل من قيم الصف الثاني المناظرة لذلك يـــتم حذفه لنحصل على المصفوفة الآتية:

**الجدول (VIII-14)**:

| | | اللاعب B | |
|---|---|---|---|
| | | W | B |
| اللاعب | B | 2 | 5 |
| A | R | 3 | -3 |

وهنا نحصل على مصفوفة (2×2) غير مستقرة ويمكن حلها بالطريقة الجبرية أو الحسابية، كما سنتعرف على ذلك لاحقا.

### VIII-5. مباراة الطرفين في حالة عدم وجود نقطة استقرار:

المباراة لا يمكن أن تكون في جميع الحالات مستقرة، أي احتوائها على نقطة الاستقرار والذي يعني أن الاستراتيجيات المستخدمة من قبل كلا اللاعبين هي استراتيجيات نقية.

فإذا كانت المباراة لا تحتوي على نقطة استقرار أي أن أعلى قيمة من القيم الصغرى للصفوف لا تساوي أصغر قيمة من القيم الكبرى للأعمدة.

$$\textbf{Maximin Value} \neq \textbf{Minimax Value}$$

تكون استراتيجيات اللاعبين استراتيجيات مختلطة، وان كل لاعب سيوزع اهتمامه بين ما هو متاح له من استراتيجيات ولن يركز على إستراتيجية واحدة فقط وإنما سيخصص جزء من وقت المباراة للعب الإستراتيجية الأولى وجزء آخر من وقت المباراة للعب الإستراتيجية الثانية وهكذا..

### VIII-6. طرق حل المباراة في حالة الاستراتيجيات المختلطة:

من الممكن حل المباراة في حالة الاستراتيجيات المختلطة باستخدام إحدى الطرق الآتية:

1. الطريقة الجبرية.
2. الطريقة الحسابية.
3. طريقة الرسم البياني.
4. طريقة البرمجة الخطية.

### VIII-6-1. الطريقة الجبرية:

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين فقط وكل لاعب له إستراتيجيتين أي عندما تكون مصفوفة المباراة بحجم (2×2) فقط.

ولغرض توضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

ولو فرضنا أن مصفوفة العائد هي:

**<u>الجدول (VIII-15):</u>**

| | | اللاعب B | |
|---|---|---|---|
| | | (1) | (2) |
| اللاعب | (1) | 4 | 10 |
| A | (2) | 5 | 2 |

وعلى فرض أن اختيار اللاعب A للإستراتيجية الأولى هو باحتمـــال $P_1$ والإســـتراتيجية الثانيـــة باحتمال $P_2$ حيث:

$P_1$: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الأولى.

$P_2$: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الثانية.

وعلى فرض أن: $P_1 + P_2 = 1$

أي: $P_2 = (1 - P_1)$

نفرض أن اللاعب B سيلعب الإستراتيجية الأولى باحتمال $Q_1$ والإستراتيجية الثانية باحتمال $Q_2$:

$Q_1$: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الأولى.

$Q_2$: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الثانية.

وعلى فرض أن:

$$Q_1 + Q_2 = 1$$

أي:

$$Q_2 = (1 - Q_1)$$

إذن:

**الجدول (VIII-16)**:

| | | اللاعب B: $Q_1$ | $1 - Q_1$ |
|---|---|---|---|
| اللاعب A | $P_1$ | 4 | 10 |
| | $1 - P_1$ | 5 | 2 |

يتم إيجاد الإستراتيجيات للاعب A من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E\ (A/B=1) = 4P_1 + 5\ P_2$$

$$E\ (A/B=2) = 10P_1 + 2\ P_2$$

$$E\ (A/B=1) = E\ (A/B=2)$$

$$4P_1+5P_2 = 10P_1 + 2\ P_2$$

بالتعويض عن $P_2$

$$4P_1+5(1-P_1) = 10\ P_1+2(1-P_1)$$

$$4P_1+5-5P_1=10P_1+2-2P_1$$

$P_1 = 1/3$

$P_2 = 2/3$

أي أن اللاعب A سيلعب الإستراتيجية الأولى 1/3 من الوقت المخصص لعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية 2/3 من الوقت.

يتم إيجاد الإستراتيجيات للاعب B من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E(B/A=1) = 4Q_1 + 10Q_2$$

$$E(B/A=2) = 5Q_1 + 2Q_2$$

$$E(B/A=2) = E(B/A=1)$$

$$4Q1+10Q2 = 5Q1 + 2Q2$$

بالتعويض عن $Q_2$

$$4Q_1+10(1-Q_1)=5Q_1+2(1-Q_1)$$

$$4Q_1+10-10Q_1=5Q_1+2-2Q_1$$

$$Q_1= 8/9$$

$$Q_2= 1/9$$

أي أن اللاعب B سيلعب الإستراتيجية الأولى بنسبة 8/9 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بنسبة 1/9 من الوقت.

أما قيمة المباراة (V) فيتم استخراجها بتعويض قيم $P_1$ أو $Q_1$ في إحدى الصيغ الأربعة وكالآتي:

$$V= 4P_1 + 5P_2 = 4(1/3) + 5(2/3)$$

$$=14/3$$

**VIII-6-2. الطريقة الحسابية:**

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين فقط ولكل لاعب له ستراتيجتين أي عندما تكون مصفوفة المباراة بحجم (2×2) فقط.

ولتوضيح هذه الطريقة نستعين بالمثال السابق وكالآتي:

**<u>الجدول (VIII-17)</u>:**

| | | اللاعب B | |
|---|---|---|---|
| | | (1) | (2) |
| اللاعب | (1) | 10 | 4 |
| A | (2) | 2 | 5 |

بعد التأكد من أن المباراة غير مستقرة، يتم حل مصفوفة المباراة باستخدام الطريقة الحسابية وعلــى وفق الخطوات الآتية:

1. نستخرج الفرق بين العددين في الصف الأول نضع القيمة المطلقة للفرق أمام الصف الثاني.
2. نستخرج الفرق بين العددين في الصف الثاني نضع القيمة المطلقة للفرق أمام الصف الأول.
3. نستخرج الفرق بين العددين في العمود الأول نضع القيمة المطلقة للفرق أمام العمود الثاني.
4. نستخرج الفرق بين العددين في العمود الثاني نضع القيمة المطلقة للفرق أمام العمود الأول.

إن النتائج تكون كالآتي:

**الجدول (VIII-18)**:

| | | B (1) | B (2) | |
|---|---|---|---|---|
| A | (1) | 10 | 4 | 3 |
| A | (2) | 2 | 5 | 6 |
| | | 1 | 8 | |

يتضح من النتائج التي حصلنا عليها أن اللاعب A سوف يستخدم إستراتيجياته تسعة مــرات حيــث يلعب الإستراتيجية الأولى ثلاث مرات والإستراتيجية الثانية ستة مرات،أي أنه ســيلعب الإســتراتيجية الأولى بنسبة 3/1 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بنسبة 3/2 من الوقت.

أما اللاعب B فسوف يستخدم إستراتيجياته تسعة مرات، أي أنه سيلعب الإستراتيجية الأولى بنــسبة 9/8 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بنسبة 9/1 من الوقت. إن هذه النتائج هي النتائج نفسها التي حصلنا عليها في الطريقة السابقة.

أما قيمة المباراة (V) فنحصل عليها كالآتي:

$$\mathbf{V = (4)(8) + (10)(1) / 9 = 42/9 = 14/3}$$

أي أن قيمة المباراة يتم الحصول عليها وذلك بضرب العائد الذي يحصل عليه اللاعب A في حالــة اختياره الإستراتيجية الأولى في عدد المرات التي يلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الأولى مضافا لهــا العائد الذي يحصل عليه اللاعب A في حالة اختياره الإستراتيجية الأولى في عدد المرات التي يلعــب بها اللاعب B الإستراتيجية الثانية مقسوما على مجموع اللعبات.

وبنفس الأسلوب يمكن الحصول على قيمة المباراة في حالة اختيار اللاعب A للإستراتيجية الثانية.

### VIII-6-3. الطريقة البيانية:

تستخدم هذه الطريقة فقط إذا كان لأحد اللاعبين إستراتيجيتين فقط أي عندما تكون مصفوفة المباراة من النوع $(N \times 2)$ أو $(2 \times N)$ وعند عدم وجود حالة الاستقرار وعدم إمكانية تقليص المبـــاراة إلـــى درجة أدنى حتى نتمكن من حلها بالطريقة الجبرية أو الحسابية. لذلك نقوم بحلهـــا بالطريقـــة البيانيـــة. والمثال التالي يوضح هذه الطريقة:

**مثـــــــال(4):**

افرض أن لدينا المباراة الآتية $(2 \times 3)$ بين شركتين B ،A. الشركة A لـــديها اســـتراتيجيين أمـــا الشركة B لديها ثلاث استراتيجيات. إذا علمت أن مصفوفة العائد هي الآتي:

**الجدول (VIII-19):**

| | | اللاعب B | | |
|---|---|---|---|---|
| | | (1) | (2) | (3) |
| اللاعب A | (1) | 3 | 5 | 12 |
| | (2) | 10 | 7 | 4 |

بعد التأكد من أن المباراة غير مستقرة، يتم حل مصفوفة المباراة باستخدام الخطـــوات الآتيـــة مـــع ملاحظة أن الطريقة البيانية تبدأ بالتحليل دائما بالنسبة للاعب الذي يمتلك إستراتيجيتين وفي هذا المثال هو اللاعب A.

نفرض أن اختيار اللاعب A للإستراتيجية الأولى هو باحتمـــال $P_1$ و الإســـتراتيجية الثانيـــة هـــو باحتمال $P_2$ وإن:

$$P_1+P_2= 1$$

أو:

$$P_2= 1- P_1$$

نفرض أن اللاعب B يختار الإستراتيجية الأولى باحتمال $Q_1$ والإستراتيجية الثانيـــة باحتمـــال $Q_2$ والإستراتيجية الثالثة باحتمال $Q_3$.

وإن:

$$Q_1+ Q_2+ Q_3=1$$

نفرض أن قيمة المباراة (V) وهي تمثل نتيجة المنافسة بين الشركتين B,A فإذا وقع اختيار الشركة B على الإستراتيجية الأولى فإن نتيجة الاختيار للشركة A هو:

$$E(A/B=1) = 3P_1 + 10P_2$$

وبما أن الشركة A تحاول أن تجعل المنافسة أكبر ما يمكن، إذن:

$3P_1 + 10P_2 \leq V$

$3P_1 + 10\,(1- P_1) \leq V$

القيد الأول: $10 - 7P_1 \leq V \;\ldots\ldots\; (1)$

أما إذا وقع اختيار اللاعب B على الإستراتيجية الثانية فان نتيجة الاختيار للشركة A هو:

$$E(A/B=2) = 5P_1 + 7P_2$$

$5P_1 + 7P_2 \leq V$

$5P_1 + 7\,(1- P_1) \leq V$

القيد الثاني: $7 - 2P_1 \leq V \;\ldots\ldots\; (2)$

أما إذا وقع اختيار اللاعب B على الإستراتيجية الثالثة فإن نتيجة الاختيار للشركة A هو:

$E(A/B=3) = 12P_1 + 4P_2 \leq V$

$12P_1 + 4(1- P_1) \leq V$

القيد الثالث: $4 + 8P_1 \leq V \;\ldots\ldots\; (3)$

يتم تحويل هذه القيود إلى معادلات لغرض الرسم وكالآتي:

$10 - 7P_1 = V \;\ldots\ldots\; (1)$

$7 - 2P_1 = V \;\ldots\ldots\; (2)$

$4 + 8P_1 = V \;\ldots\ldots\; (3)$

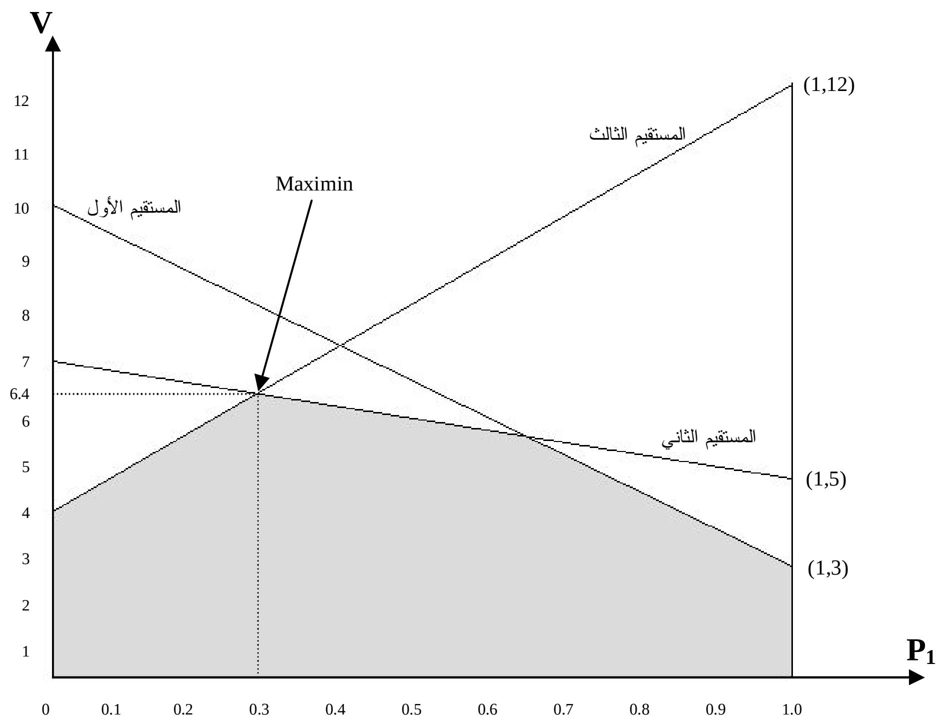
ويتم تحديد النقاط كما هو موضح بالجدول الآتي:

**الجدول (20-VIII):**

| المعادلـــــــة | $P_1$ | V |
|---|---|---|
| (1) | 0<br>1 | 10<br>3 |
| (2) | 0<br>1 | 7<br>5 |
| (3) | 0<br>1 | 4<br>12 |

نرسم خطوط مستقيمة لمعادلات القيود وكما في الشكل:

**الشكل (1-VIII)**:




المنطقة المضللة هي منطقة الحلول الممكنة وان الشركة A تحاول أن تجعل نتيجة المنافسة أكبر ما يمكن. إن أعلى نقطة في منطقة القبول هي نقطة تقاطع المستقيم الثاني مع المستقيم الثالث.

من الرسم نجد أن قيمة المباراة $V= 6.4$ وهذا ربح إلى A بعد كل لعبة في حالة إتباعه الإستراتيجية الأولى باحتمال $P_1= 0.3$ و $P_2= 0.7$.

لتحديد سياسات اللاعب B نلاحظ أن هناك خطين يمران في النقطة Maximin الأول يعود إلى سياسة B الثانية والثاني إلى سياسة B الثالثة، وهذا يدل على أن اللاعب B يمكن أن يخلط بين السياستين الثانية والثالثة، أي أن:

$Q_1= 0$

$Q_3= 1- Q_2$

**الجدول (21-VIII)**:

اللاعب B

| | | (2) | (3) |
|---|---|---|---|
| اللاعب | (1) | 5 | 12 |
| A | (2) | 7 | 4 |

$E(A/B=1) = 5Q_2 + 12\,(1 - Q_2) = 12 - 7Q_2$

$E(A/B=2) = 7Q_2 + 4\,(1 - Q_2) = 4 + 3Q_2$

$E(A/B=1) = E(A/B=2)$

$12 - 7Q_2 = 4 + 3Q_2$

$10\,Q_2 = 8$

$Q_2 = 8/10 = 4/5$

$Q_3 = 1/5$

$E(A/B=1) = 12 - 7(4/5) = 6.4$

ومن الجدير بالملاحظة أن ميل المعادلتين الثانية والثالثة متعاكس الإشارة.

وفي حالة مرور أكثر من خطين في نقطة Maximin فإن اللاعب B يمكن أن يخلط بين السياسات التي تمثلها تلك الخطوط، وأن أي خطين مستقيمين لهما إشارة متعاكسة في ميلهما يمكن أن يعطينا حلا أمثلاً بديلاً.

**<u>مثـــال(5)</u>:**

أوجد الحل للمباراة الآتية إذا علمت أن مصفوفة العائد هي M × 2.

**<u>الجدول (VIII-22)</u>:**

| | | اللاعب B (1) | اللاعب B (2) |
|---|---|---|---|
| اللاعب A | (1) | 3 | 10 |
| | (2) | 5 | 7 |
| | (3) | 12 | 4 |

بعد التأكد من أن المباراة غير مستقرة يتم حل مصفوفة المباراة باستخدام الخطوات الآتية حيث أن التحليل سيكون للاعب الذي يمتلك إستراتيجيتين وفي هذا المثال هو اللاعب B.

نفرض أن اختيار اللاعب B للإستراتيجية الأولى هو باحتمال $Q_1$ والإستراتيجية الثانية هو باحتمال $Q_2$ وإن:

$$Q_1+Q_2 = 1$$

أو:

$$Q_2 = 1- Q_1$$

نفرض أن اللاعب A يختار الإستراتيجية الأولى باحتمال $P_1$ والإستراتيجية الثانية باحتمال $P_2$ والإستراتيجية الثالثة باحتمال $P_3$.

وإن:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

نفرض أن قيمة المباراة (V) وهي تمثل نتيجة المنافسة بين الشركتين B,A فإذا وقع اختيار الشركة A على الإستراتيجية الأولى فإن نتيجة الاختيار للشركة B هو:

$$E(A/B=1) = 3Q_1 + 10Q_2$$

وبما أن الشركة B تحاول أن تجعل المنافسة أقل ما يمكن، إذن:

$$3Q_1 + 10Q_2 \geq V$$

$$3Q_1 + 10(1 - Q_1) \geq V$$

القيد الأول: $10 - 7Q_1 \geq V \;\ldots\ldots\; (1)$

أما إذا وقع اختيار اللاعب A على الإستراتيجية الثانية فإن نتيجة الاختيار للشركة B هو:

$$E(A/B=2) = 5Q_1 + 7Q_2 \geq V$$

$$5Q_1 + 7(1 - Q_1) \geq V$$

القيد الثاني: $7 - 2Q_1 \geq V \;\ldots\ldots\; (2)$

أما إذا وقع اختيار اللاعب A على الإستراتيجية الثالثة فإن نتيجة الاختيار للشركة B هو:

$$E(A/B=3) = 12Q_1 + 4Q_2 \geq V$$

$$12Q_1 + 4(1 - Q_1) \geq V$$

القيد الثالث: $4 + 8Q_1 \geq V \;\ldots\ldots\; (3)$

يتم تحويل هذه القيود معادلات لغرض الرسم وكالآتي:

$$10 - 7P_1 = V \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$7 - 2P_1 = V \;\ldots\ldots\; (2)$$

$$4 + 8P_1 = V \;\ldots\ldots\; (3)$$

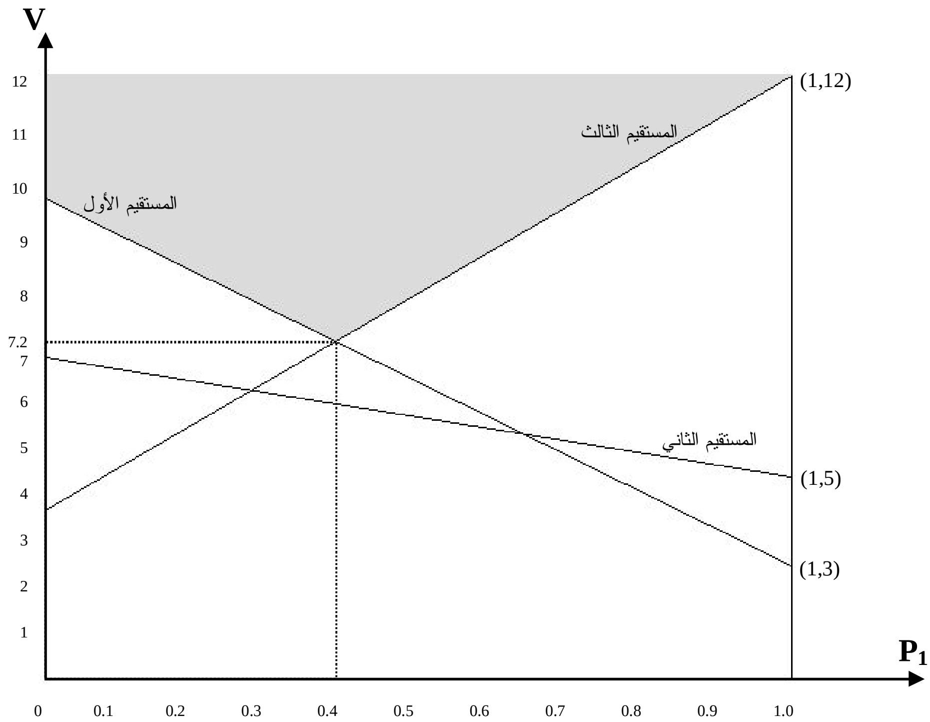
بعد تحديد النقاط وكما هو موضح بالجدول الآتي:

**الجدول (VIII-23)**:

| المعادلـــــــة | $P_1$ | V |
|---|---|---|
| (1) | 0 | 10 |
| | 1 | 3 |
| (2) | 0 | 7 |
| | 1 | 5 |
| (3) | 0 | 4 |
| | 1 | 12 |

نرسم خطوط مستقيمة لمعادلات القيود وكما في الشكل التالي:

**الشكل (VIII-2)**:




المنطقة المضللة هي منطقة الحلول الممكنة وإن الشركة B تحاول أن تجعل نتيجة المنافسة أقل مـــا يمكن. إن أوطأ نقطة في منطقة القبول هي نقطة تقاطع المستقيم الأول مع المستقيم الثالث.

من الرسم نجـــد أن: $V = 7.2$ وان الــشركة تتبـــع الإســـتراتيجية الأولـــى باحتمـــال $Q_1 = 0.4$ والإستراتيجية الثانية باحتمال $Q_2 = 0.6$.

### VIII-6-4. طريقة البرمجة الخطية:

تستخدم هذه الطريقة في جميع المباريات ذات المجموع الصفري بين لاعبين وخاصة تلك التي تكون من النوع $M \times N$ حيث أن: $M, N > 2$. عند عدم وجود نقطة استقرار وعدم إمكانية تقليص المباراة إلى درجة أدنى حتى نتمكن من حلها بالطرق السابقة، تقدم البرمجة الخطية أفضل حل لمثل هذه المشاكل.

في هذه الطريقة يتم تحويل المباراة إلى صيغة برمجة خطية وتمثل كل إستراتيجية باحتمال معين. والمثال الآتي يوضح هذه الطريقة:

**<u>مثـال(6)</u>**:

افرض أن لدينا المباراة الآتية:

**<u>الجدول (VIII-24)</u>**:

اللاعب B

| اللاعب A | | (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|
| | (1) | 2 | 3 | 0 |
| | (2) | 1 | 2 | 3 |
| | (3) | 4 | 1 | 2 |

وعلى فرض اختيار اللاعب A للإستراتيجية الأولى هو باحتمال $P_1$ والإستراتيجية الثانية باحتمال $P_2$ والإستراتيجية الثالثة باحتمال $P_3$ حيث:

$P_1$: نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الأولى.

$P_2$: نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الثانية.

$P_3$: نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الثالثة.

أما بالنسبة للاعب B، فإنه سيقسم وقته بين إستراتيجياته باحتمال:

$Q_1$: نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الأولى.

$Q_2$: نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الثانية.

$Q_3$: نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الثالثة.

نلاحظ أن المباراة متحيزة للاعب A وان اللاعب B متأكد من خسارته ولذلك يحاول أن تكون خسارته أقل ما يمكن، أي أن دالة الهدف تكون $\text{Min } Z = V$ ، حيث V هي قيمة المباراة.

واستنادا على ذلك، يمكن صياغة القيود من وجهة نظر اللاعب B كالآتي:

$$2Q_1 + 3Q_2 + 0Q_3 \leq V$$
$$1Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 \leq V$$
$$4Q_1 + 1Q_2 + 2Q_3 \leq V$$

إن:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$$
$$Q_1, Q_2, Q_3 \geq 0$$

ولغرض التخلص من (V) في الجانب الأيمن، نقسم طرفي كل قيد على V وكالآتي:

$$2Q_1/V + 3Q_2/V + 0Q_3/V \leq 1$$
$$1Q_1/V + 2Q_2/V + 3Q_3/V \leq 1$$
$$4Q_1/V + 1Q_2/V + 2Q_3/V \leq 1$$
$$Q_1/V + Q_2/V + Q_3/V = 1/V$$
$$Q_1/V, Q_2/V, Q_3/V \geq 0$$

فإذا افترضنا أن:

$$\overline{Y}_1 = Q_1/V \quad ، \quad \overline{Y}_2 = Q_2/V \quad ، \quad \overline{Y}_3 = Q_3/V$$

فإن القيود تصبح بالشكل الآتي:

$$2\overline{Y}_1 + 3\overline{Y}_2 + 0\overline{Y}_3 \leq 1$$
$$1\overline{Y}_1 + 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 \leq 1$$
$$4\overline{Y}_1 + 1\overline{Y}_2 + 2\overline{Y}_3 \leq 1$$
$$\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = 1/V$$
$$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{Y}_3 \geq 0$$

أما دالة الهدف Min Z = V فإنها تصبح Max Z = 1/V، وبذلك يمكن إعـــادة كتابـــة نمـــوذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$\text{Max } Z = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$$

S/C:

$$2\overline{Y}_1 + 3\overline{Y}_2 + 0\overline{Y}_3 \leq 1$$
$$1\overline{Y}_1 + 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 \leq 1$$
$$4\overline{Y}_1 + 1\overline{Y}_2 + 2\overline{Y}_3 \leq 1$$
$$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \overline{Y}_3 \geq 0$$

ويتم ترتيب البيانات في الجدول الأول وكما هو موضح أدناه:

**الجدول (VIII-25):**

| V.B | $\bar{Y}_1$ | $\bar{Y}_2$ | $\bar{Y}_3$ | $\bar{X}_1$ | $\bar{X}_2$ | $\bar{X}_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}_1$ | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\bar{X}_2$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\bar{X}_3$ | $\boxed{4}$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | Z= 0 |

من الجدول يتبين أن المتغير الداخل الذي سيصبح متغيرا أساسيا هو المتغير $Y_1$ وقد تم اختيـــاره عشوائيا. أما المتغيرات الأساسية $X_1$ , $X_2$ , $X_3$ فقد تم اختيارها بهذه الرموز لأنها تمثل استراتيجيات اللاعب A.

ونكمل بطريقة السمبلكس لنحصل الجداول 26، 27، 28 كما يلي:

**الجدول (VIII-26):**

| V.B | $\bar{Y}_1$ | $\bar{Y}_2$ | $\bar{Y}_3$ | $\bar{X}_1$ | $\bar{X}_2$ | $\bar{X}_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}_1$ | 0 | $\boxed{5/2}$ | -1 | 1 | 0 | -1/2 | 1/2 |
| $\bar{X}_2$ | 0 | 7/4 | 5/2 | 0 | 1 | -1/4 | 3/4 |
| $\bar{Y}_1$ | 1 | 1/4 | 1/2 | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 |
| Z | 0 | 3/4 | 1/2 | 0 | 0 | -1/4 | Z=1/4 |

**الجدول (VIII-27):**

| V.B | $\bar{Y}_1$ | $\bar{Y}_2$ | $\bar{Y}_3$ | $\bar{X}_1$ | $\bar{X}_2$ | $\bar{X}_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{Y}_2$ | 0 | 1 | -2/5 | 2/5 | 0 | -1/5 | 1/5 |
| $\bar{X}_2$ | 0 | 0 | $\boxed{16/5}$ | -7/10 | 1 | 1/10 | 2/5 |
| $\bar{Y}_1$ | 1 | 0 | 3/5 | -1/10 | 0 | 3/10 | 1/5 |
| Z | 0 | 0 | 4/5 | -3/10 | 0 | -1/10 | Z= 2/5 |

والجدول الأخير للمشكلة يظهر بالشكل الأتي:

**الجدول (VIII-28)**:

| V.B | $\overline{Y}_1$ | $\overline{Y}_2$ | $\overline{Y}_3$ | $\overline{X}_1$ | $\overline{X}_2$ | $\overline{X}_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{Y}_2$ | 0 | 1 | 0 | 5/16 | 1/8 | -3/16 | 1/4 |
| $\overline{Y}_3$ | 0 | 0 | 1 | -7/32 | 5/16 | 1/32 | 1/8 |
| $\overline{Y}_1$ | 1 | 0 | 0 | 1/32 | -3/16 | 9/32 | 1/8 |
| Z | 0 | 0 | 0 | -1/8 | -1/4 | -1/8 | Z= 1/2 |

الحل الأمثل هو:

$$\overline{Y}_1 = 1/8$$

$$\overline{Y}_2 = 1/4$$

$$\overline{Y}_3 = 1/8$$

وبما أن $Z=1/V$، إذن إن قيمة المباراة تكون مساوية إلى $V=2$.

أما قيم $Y_1$ , $Y_2$ , $Y_3$ يتم استخراجها كالآتي:

$$Q_1 = (2)\,(1/8) = 1/4$$

$$Q_2 = (2)\,(1/4) = 1/2$$

$$Q_3 = (2)\,(1/8) = 1/4$$

أي أن اللاعب B سيلعب الإستراتيجية الأولى (1/4) الوقت المخصص للعب، وسيلعب الإستراتيجية الثانية (1/2) الوقت المخصص للعب والإستراتيجية الثالثة (1/4) من الوقت المخصص للعب وأن، قيمة المباراة هي 2.

أما إستراتيجيات اللاعب A فيمكن استخراجها من قيم المتغيرات الثنائية التي تمثلها المعاملات في الصف Z حيث:

$$\overline{X}_1 = 1/8$$

$$\overline{X}_2 = 1/4$$

$$\overline{X}_3 = 1/8$$

وبالطريقة نفسها نجد:

$$P_1 = (2)\,(1/8) = 1/4$$

$$P_2 = (2)\,(1/4) = 1/2$$

$$P_3 = (2)\,(1/8) = 1/4$$

أي أن اللاعب A سيلعب الإستراتيجية (1/4) الوقت المخصص للعــب، وســيلعب الإســتراتيجية الثانية (1/2) الوقت المخصص للعب والإستراتيجية الثالثة (1/4) من الوقت المخصص للعب.

وبما أن قيمة المباراة هي 2 فإن اللاعب "A" هو الذي سيفوز بالمباراة.