

SOLUTION DE LA SÉRIE DE TD N° 02

EXERCICE 01 :

1. Nature du mouvement.

Coureur A	$0 \leq t \leq 120 \text{ s}$	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	$a_A = \frac{6}{120} = 0,05 \text{ m/s}^2 = \text{Cte}$
	$120 \leq t \leq 240 \text{ s}$	Mouvement rectiligne uniforme	$V_A = 6 \text{ m/s} = \text{Cte}$
Coureur B	$0 \leq t \leq 40 \text{ s}$	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	$a_B = \frac{4}{40} = 0,1 \text{ m/s}^2 = \text{Cte}$
	$t \geq 40 \text{ s}$	Mouvement rectiligne uniforme	$V_B = 4 \text{ m/s} = \text{Cte}$

2. Les deux coureurs ont la même vitesse à $(t = t_1)$ Point d'intersection des deux diagrammes.

$$V_A(t_1) = V_B(t_1) = 4 \text{ m/s} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{4}{t_1} = \frac{6}{120} \Rightarrow \boxed{t_1 = 80 \text{ s}}$$

La distance qui sépare les deux coureurs. $D_1 = |x_A(t_1) - x_B(t_1)|$

La position à un instant t est calculée par l'aire sous le diagramme des vitesses ($x_A(0) - x_B(0) = 0$) entre les instants $t_0 = 0 \text{ s}$ et t .

$$x_A(t_1) = \frac{V_A(t_1) \times t_1}{2} = \frac{4 \times 80}{2} = 160 \text{ m} \quad \text{et} \quad x_B(t_1) = \frac{V_B(t_1) \times [(t_1 - 40) + t_1]}{2} = \frac{4 \times (80 + 40)}{2} = 240 \text{ m}$$

D'où, le coureur B est en avance sur le coureur A et la distance qui les séparent est :

$$\boxed{D_1 = |x_A(t_1) - x_B(t_1)| = 80 \text{ m}}$$

3. $t_2 = 120 \text{ s}$:

$$x_A(t_2) = \frac{V_A(t_2) \times t_2}{2} = \frac{6 \times 120}{2} = 360 \text{ m} \quad \text{et} \quad x_B(t_2) = \frac{V_B(t_2) \times [(t_2 - 40) + t_2]}{2} = \frac{4 \times (80 + 40)}{2} = 400 \text{ m}$$

D'où, le coureur B est en avance sur le coureur A et la distance qui les séparent est :

$$\boxed{D_2 = |x_A(t_2) - x_B(t_2)| = 40 \text{ m}}$$

4. Puisque le coureur A n'a pas encore rattrapé le coureur B à $(t = t_2)$, alors l'instant où les deux coureurs sont côte à côte est $(t_3 > t_2)$.

$$x_A(t_3) = \frac{V_A(t_3) \times [(t_3 - 120) + t_3]}{2} = 6 \cdot t_3 - 360 \quad \text{et} \quad x_B(t_3) = \frac{V_B(t_3) \times [(t_3 - 40) + t_3]}{2} = 4 \cdot t_3 - 80$$

Les deux coureurs sont côte à côte : $x_A(t_3) = x_B(t_3) \Rightarrow 6 \cdot t_3 - 360 = 4 \cdot t_3 - 80 \Rightarrow t_3 = 140 \text{ s}$

5. $t_4 = 240 \text{ s}$: La longueur de la piste est

$$L = x_A(t_4) = \frac{V_A(t_4) \times [(t_4 - 120) + t_4]}{2} = \frac{6 \times (120 + 240)}{2} \Rightarrow L = 1080 \text{ m}$$

Le coureur B atteint la ligne d'arrivée à $(t = t_5) \Rightarrow x_B(t_5) = L$. Donc :

$$x_B(t_5) = \frac{V_B(t_5) \times [(t_5 - 40) + t_5]}{2} = 4 \cdot t_5 - 80 = 1080 \Rightarrow \boxed{t_5 = 290 \text{ s}}$$

EXERCICE 02 :

1. Equation horaires des trois étapes (*en considérant l'origine des temps et des espaces au début de chaque étape*)

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 \\ V_1(t) = x_1' = a_1 \cdot t \\ a_1(t) = x_1'' = a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(t) = V \cdot t \\ V_2(t) = V \\ a_2(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3(t) = -\frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 + V \cdot t \\ V_3(t) = -a_1 \cdot t + V \\ a_3(t) = -a_1 \end{cases}$$

Les trois étapes ont la même durée $\Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = T$

La distance totale parcourue est : $X_1 + X_2 + X_3 = X$

En remplaçant dans l'équation horaire du mouvement

$$\frac{1}{2} a_1 \cdot T^2 + V \cdot T + \left(-\frac{1}{2} a_1 \cdot T^2 + V \cdot T \right) = X \quad \Rightarrow \quad T = \frac{X}{2V}$$

D'autre part $V_1(t) = a_1 \cdot t$ et quand $t = t_1 = T$ alors $V_1(T) = a_1 \cdot T = V \Rightarrow T = V/a_1$

En comparant les deux équations on obtient

$$\frac{X}{2V} = \frac{V}{a_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = \frac{2 \cdot V^2}{X}}$$

Application numérique : $V = 270 \text{ km/h} = 75 \text{ m/s}$ et $X = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$

$$\boxed{a_1 = 3,75 \text{ m/s}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{t_1 = t_2 = t_3 = T = 20 \text{ s}}$$

2. La distance parcourue à chaque étape

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot T^2 = 750 \text{ m} \\ X_2 = V \cdot T = 1500 \text{ m} \\ X_3 = -\frac{1}{2} a_1 \cdot T^2 + V \cdot T = 750 \text{ m} \end{cases}$$

3. Les équations horaires du mouvement (*en considérant l'origine des espaces au début du mouvement du train*):

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 + x_1(0) = 1,875 \cdot t^2 \\ x_2(t) = V \cdot t + x_2(0) = 75 \cdot t + 750 \\ x_3(t) = -\frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 + V \cdot t + x_3(0) = -1,875 \cdot t^2 + 75 \cdot t + 2250 \end{cases}$$

EXERCICE 03 :

1.

$$\begin{cases} x_C(t) = V \cdot t + x_{0C} \\ x_V(t) = \frac{1}{2} a_V \cdot t^2 + V_{0V} \cdot t + x_{0V} \end{cases}$$

En appliquant les conditions initiales il vient que :

$$\begin{cases} x_C(t) = V \cdot t & \text{Mouvement rectiligne uniforme} \\ x_V(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + d & \text{Mouvement rectiligne uniformément accéléré} \end{cases}$$

2. Le cycliste rattrape la voiture : $x_C(t) = x_V(t)$

$$\frac{1}{2} a \cdot t^2 - V \cdot t + d = 0$$

pour que cette équation puisse avoir des solutions réelles, il faut que :

$$\Delta = V^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot d \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{d \leq \frac{V^2}{2 \cdot a}}$$

3. Les temps de rencontres sont donnés par les solutions de l'équation, c'est-à-dire :

$$t_1 = \frac{V - \sqrt{\Delta}}{a} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{V + \sqrt{\Delta}}{a}$$

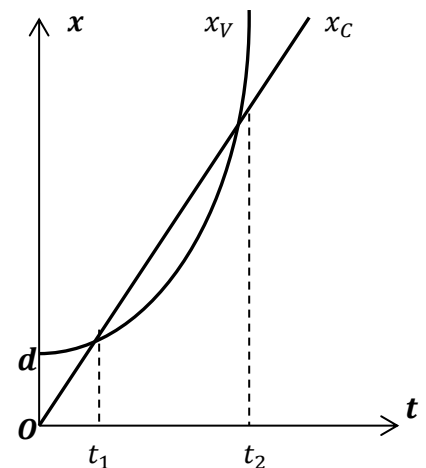
le cycliste rattrape la voiture en $(t = t_1)$ car $(t_1 < t_2)$ donc :

$$\boxed{t_1 = \frac{V - \sqrt{V^2 - 2 \cdot a \cdot d}}{a}}$$

4. Discussion des diagrammes des espaces :

Cas général $\Delta > 0$

- $0 \leq t < t_1 \Rightarrow x_C < x_V$: La voiture est devant le cycliste.
- $t = t_1 \Rightarrow x_C = x_V$: Le cycliste *rattrape* la voiture.
- $t_1 < t < t_2 \Rightarrow x_C > x_V$: Le cycliste *dépasse* la voiture.
- $t = t_2 \Rightarrow x_C = x_V$: La voiture *rattrape* le cycliste.
- $t > t_2 \Rightarrow x_C < x_V$: La voiture *dépasse* le cycliste.

Cas particulier $\Delta = 0$ l'équation admet une solution

Dans ce cas le cycliste rattrape la voiture, mais ne peut pas la dépasser.

5. A.N. : Les temps de rencontres pour : $d = 10 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m/s}^2$, $V = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$

$$\Delta = V^2 - 2a \cdot d = 60 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 1,13 \text{ s}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_2 = 8,87 \text{ s}}$$

EXERCICE 04 :

$$V(t) = 5\pi \cdot \cos \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right]$$

1. Equation du mouvement :

$$x(t) = \int V(t) \cdot dt = 5\pi \cdot \int \cos \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right] \cdot dt \quad \text{donc} \quad x(t) = 5 \cdot \sin \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right] + K$$

K est une constante d'intégration

Conditions initiales : $(t = 0, x(0) = 5)$

D'où $x(0) = 5 + K = 5$ et $K = 0$

Alors

$$x(t) = 5 \cdot \sin \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right]$$

2. La forme générale $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ donc, en comparant avec l'équation précédente nous trouvons :

- $x_0 = 5 \text{ m}$
- $\omega = \pi = 3,14 \text{ rad/s}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$
- $\nu = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$
- $\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

3. Accélération

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = -5\pi^2 \cdot \sin \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right]$$

4. $0 \leq t \leq T$ donc $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$:

$$V(t) = 0 \Rightarrow \cos \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right] = 0 \Rightarrow \pi \left(t + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Rightarrow \boxed{t = n} \quad (n \text{ entier naturel})$$

$$a(t) = 0 \Rightarrow \sin \left[\pi \left(t + \frac{1}{2} \right) \right] = 0 \Rightarrow \pi \left(t + \frac{1}{2} \right) = n \cdot \pi \Rightarrow \boxed{t = n + \frac{1}{2}} \quad (n \text{ entier naturel})$$

D'où le tableau suivant :

t	0	0,5	1	1,5	2
$V(t)$	-	-	+	+	
$a(t)$	-	+	+	-	
Nature du mouvement	accélééré	décélééré	accélééré	décélééré	

EXERCICE 05 :**1. Calcul des vitesses.**

$t \in [0,10] s$; $a_1 = 3 m/s^2 = \text{Constante} \Rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$V(10) - V(0) = \int_0^{10} a_1 \cdot dt = [3 \cdot t]_0^{10} \Rightarrow V(10) - V(0) = 30$$

Comme $V(0) = 0$ donc $V(10) = 30 m/s$

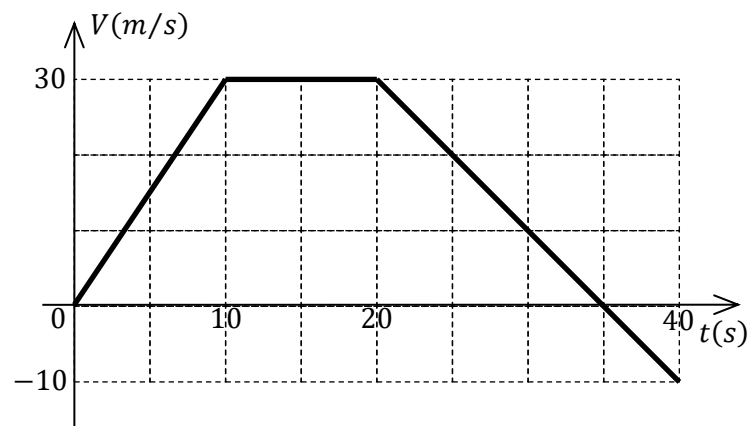
$t \in [10,20] s$; $a_2 = 0 \Rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniforme.

$$V(20) - V(10) = \int_{10}^{20} a_2 \cdot dt = [C]_{10}^{20} \Rightarrow V(20) - V(10) = 0 \Rightarrow V(20) = 30 m/s$$

$t \in [20,40] s$; $a_3 = -2 m/s^2 = \text{Constante} \Rightarrow$ le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$V(40) - V(20) = \int_{20}^{40} a_3 \cdot dt = [-2 \cdot t]_{20}^{40} \Rightarrow V(40) - V(20) = -40$$

Comme $V(20) = 30 m/s$ donc $V(40) = -10 m/s$

2.**3. Mouvement accéléré-décéléré.**

Durant la troisième étape la vitesse s'annule. $V_3(t'') = a_3 \cdot t'' + V_{03} = -2 \cdot t'' + 30$

$$V_3 = 0 \Rightarrow t'' = 15 s \quad \text{et} \quad t = t'' + 20 = 35 s$$

D'où

$0 \leq t \leq 10 s$	$V_1(t) > 0$	$a_1 > 0$	Le mouvement est accéléré
$10 \leq t \leq 20 s$	$V_2(t) = \text{Constante}$	$a_2 = 0$	Le mouvement est uniforme
$20 \leq t \leq 35 s$	$V_3(t) > 0$	$a_3 < 0$	Le mouvement est décéléré
$35 \leq t \leq 40 s$	$V_3(t) < 0$	$a_3 < 0$	Le mouvement est accéléré

4. Expression de la vitesse en fonction du temps $V(t)$.

$0 \leq t \leq 10 s$	$V_1(t) = a_1 \cdot t + V_{01}$	$V_1(t) = 3 \cdot t$
$10 \leq t \leq 20 s$	$V_2(t') = V_{02} = \text{Constante}$	$V_2(t') = 30$
$20 \leq t \leq 40 s$	$V_3(t'') = a_3 \cdot t'' + V_{03}$	$V_3(t'') = -2 \cdot t'' + 30$

5. Equation horaire du mouvement $x(t)$.

Calcul des positions au début de chaque étape.

 $x_{01} = x(0) = 0$ le point matériel se trouve à l'origine des coordonnées.

$$x_{02} = x(10) \quad \text{avec} \quad x(10) - x(0) = \frac{10 \times 30}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{02} = x(10) = 150 \text{ m}$$

$$x_{03} = x(20) \quad \text{avec} \quad x(20) - x(0) = \frac{(20 + (20 - 10)) \times 30}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{03} = x(20) = 450 \text{ m}$$

D'où le tableau

$0 \leq t \leq 10 \text{ s}$	$x_1(t) = \frac{3}{2}t^2$	$t = t$	$x_1(t) = \frac{3}{2}t^2$
$10 \leq t \leq 20 \text{ s}$	$x_2(t') = 30.t' + 150$	$t' = t - 10$	$x_2(t) = 30.(t - 10) + 150$
$20 \leq t \leq 40 \text{ s}$	$x_3(t'') = -t''^2 + 30.t'' + 450$	$t'' = t - 20$	$x_3(t) = -(t - 20)^2 + 30.(t - 20) + 450$

6. Le déplacement du mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 40 \text{ s}$.

$$x(40) - x(0) = \frac{(35 + (20 - 10)) \times 30}{2} + \frac{(40 - 35) \times (-10)}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(40) - x(0) = 650 \text{ m}}$$

EXERCICE 06 :

- $V = A.x + B$ Unités : $[V] = m/s$, $[x] = m \Rightarrow [A] = 1/s$ et $[B] = m/s$.
- $A > 0$, $B > 0$ et $x_0 = 0 \Rightarrow V_0 = B > 0$ d'où x augmente , donc x est toujours positif
-

$$V = \frac{dx}{dt} = A.x + B \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{A.x + B} = dt$$

En intégrant

$$\ln(A.x + B) = A.t + \text{Cte}$$

Conditions initiales : $(t = 0 \text{ s} , x_0 = 0 \text{ m}) \Rightarrow \text{Cte} = \ln(B)$

En remplaçant

$$A.x + B = B.e^{A.t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{B}{A}(e^{A.t} - 1)}$$

4.

$$\boxed{V = \frac{dx}{dt} = B.e^{A.t}} \quad \text{et} \quad \boxed{a = \frac{dV}{dt} = A.B.e^{A.t}}$$

- $V.a = A.B^2.e^{2A.t} > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est toujours accéléré (quelque soit la position x).

EXERCICE 07:

1. Montrons que la solution de l'équation différentielle $\vec{a} = -k \cdot V^2 \cdot \vec{e}_x$ est de la forme

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0 \cdot t}$$

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{V_0^2}{(1 + kV_0 \cdot t)^2}$$

Et

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{-k \cdot V_0^2}{(1 + kV_0 \cdot t)^2}$$

En comparant

$$a = -k \cdot V^2 \quad \text{et} \quad \vec{a} = -k \cdot V^2 \cdot \vec{e}_x$$

2. $x(t) = \int V(t) \cdot dt$

$$x(t) = \int \frac{V_0}{1 + kV_0 \cdot t} dt = \frac{1}{k} \int \frac{kV_0}{1 + kV_0 \cdot t} dt$$

Donc

$$x(t) = \int \frac{V_0}{1 + kV_0 \cdot t} dt = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0 \cdot t) + C$$

En prenant les conditions initiales ($t_0 = 0, x_0 = 0$), on trouve $x_0 = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0 \cdot t_0) + C \Rightarrow C = 0$
D'où

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0 \cdot t)}$$

- 3.

$$x(t) = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0 \cdot t) \quad \Rightarrow \quad 1 + kV_0 \cdot t = \exp(k \cdot x)$$

Comme

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0 \cdot t} = \frac{V_0}{\exp(k \cdot x)}$$

Finalement

$$\boxed{V = V_0 \cdot e^{-k \cdot x}}$$

EXERCICE 08 :

$$a - \omega^2 x = 0$$

1. Montrons que : $x(t) = A.e^{\omega t} + B.e^{-\omega t}$ est une solution de cette équation différentielle. Calculons les dérivées première et seconde.

$$\begin{cases} x(t) = A.e^{\omega t} + B.e^{-\omega t} \\ V(t) = x' = A\omega.e^{\omega t} - B\omega.e^{-\omega t} \\ a(t) = x'' = A\omega^2.e^{\omega t} - B\omega^2.e^{-\omega t} \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

D'où

$$a(t) = \omega^2(A.e^{\omega t} - B.e^{-\omega t}) = \omega^2 x(t)$$

Finalement

$$a - \omega^2 x = 0$$

2. Unité : Puisque $[a] = m/s^2$ et $[x] = m \Rightarrow [\omega] = 1/s$

3. Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $V(0) = 0$. En remplaçant dans les équations (1).

$$\begin{cases} x_0 = A + B \\ 0 = A - B \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = B = \frac{x_0}{2}}$$

4. En remplaçant dans l'équation (1).

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0 \cdot ch(\omega t)}$$

Et en dérivant.

$$\boxed{V(t) = x_0 \omega \cdot sh(\omega t)}$$

Et

$$\boxed{a(t) = x_0 \omega^2 \cdot ch(\omega t)}$$

5. Pour $t \geq 0 \Rightarrow \omega t \geq 0$ nous avons $sh(\omega t) \geq 0$ et $ch(\omega t) \geq 0$. Donc

$$V(t) \cdot a(t) \geq 0$$

Le mouvement est toujours accéléré pour $t \geq 0$.

6. Nous avons $x^2 = x_0^2 \cdot ch^2(\omega t)$ et $V^2 = x_0^2 \omega^2 \cdot sh^2(\omega t)$.

Mais puisque $ch^2(\omega t) - sh^2(\omega t) = 1 \Rightarrow sh^2(\omega t) = ch^2(\omega t) - 1$.

En remplaçant dans l'expression de V^2 on trouve :

$$V^2 = x_0^2 \omega^2 \cdot ch^2(\omega t) - x_0^2 \omega^2$$

Et

$$V^2 = \omega^2 \cdot x^2 - x_0^2 \omega^2 = \alpha \cdot x^2 + \beta$$

Avec

$$\boxed{\alpha = \omega^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = -x_0^2 \omega^2}$$

EXERCICE 09 :

1. $\vec{a} = \vec{g}$ en projetant sur les axes (OX) et (OY) on trouve

$$\begin{cases} a_x = g \\ a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = g \cdot t + V_{0x} = g \cdot t \\ V_y = V_{0y} = V_0 \end{cases}$$

D'où les équations horaires :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + x_0 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ y = V_0 \cdot t + y_0 = V_0 \cdot t \end{cases}$$

2. En remplaçant $t = y/V_0$ on obtient l'équation de la trajectoire

$$x = \left(\frac{g}{2V_0^2} \right) \cdot y^2$$

3. Calcul de a_T et a_N .

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{g^2 t^2 + V_0^2}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{g^2 \cdot t}{\sqrt{g^2 t^2 + V_0^2}} \quad \text{et} \quad a_N = \frac{V^2}{\rho} = \frac{g^2 t^2 + V_0^2}{\rho}$$

D'autre part on a :

$$a^2 = g^2 = a_T^2 + a_N^2$$

En remplaçant

$$\frac{g^4 \cdot t^2}{V^2} + \frac{V^4}{\rho^2} = g^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V^4}{\rho^2} = \frac{g^2(V^2 - g^2 t^2)}{V^2} = \frac{g^2 \cdot V_0^2}{V^2}$$

Or

$$V_0 = V \cdot \cos \theta \quad \text{ou} \quad V = \frac{V_0}{\cos \theta}$$

Donc

$$\rho^2 = \frac{V^6}{g^2 \cdot V_0^2} = \frac{V_0^4}{g^2 \cdot \cos^6 \theta}$$

Finalement

$$\rho = \frac{V_0^2}{g \cdot \cos^3 \theta}$$

EXERCICE 10 :

$$x(t) = R \cdot \omega \cdot t - R \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad ; \quad y(t) = R - R \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega$$

1. Unités : $[\omega \cdot t] = [\omega] \cdot [t] = \text{rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\omega] = \text{rad/s}}$
 $\boxed{[R] = [x] = [y] = \text{mètre}}$

2. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes : $\vec{V} = x'(t) \cdot \vec{e}_x + y'(t) \cdot \vec{e}_y$
 En dérivant

$$\vec{V} = R\omega - R\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + R\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y$$

Ou

$$\boxed{\vec{V} = R\omega[(1 - \cos(\omega \cdot t)) \cdot \vec{e}_x + \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y]}$$

3. Module de la vitesse. (R et ω sont des constantes positives.)

$$V = |\vec{V}| = R\omega \sqrt{(1 - \cos(\omega \cdot t))^2 + \sin^2(\omega \cdot t)}$$

D'où

$$V = R\omega \sqrt{1 - 2\cos(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)} = R\omega \sqrt{2(1 - \cos(\omega \cdot t))}$$

Comme

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin^2(\alpha/2)$$

Alors

$$V = R\omega \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 2 \cdot R\omega \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}$$

4. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes : $\vec{a} = x''(t) \cdot \vec{e}_x + y''(t) \cdot \vec{e}_y$
 En dérivant

$$\boxed{\vec{a} = R\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + R\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y}$$

Et son module

$$a = |\vec{a}| = R\omega^2 \sqrt{(\sin(\omega \cdot t))^2 + (\cos(\omega \cdot t))^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = R\omega^2}$$

5. Accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} 2 \cdot R\omega \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_T = R\omega^2 \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}$$

Accélération normale

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad a_N^2 = a^2 - a_T^2 = R^2\omega^4 \left(1 - \cos^2\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)\right)$$

Et

$$a_N^2 = R^2\omega^4 \cdot \sin^2\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_N = R\omega^2 \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}$$

6. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{4 \cdot R^2\omega^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{R\omega^2 \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}$$

D'où

$$\boxed{\rho = 4R \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}$$

EXERCICE 11 :

pour $x \in [0, d]$ $a_x(t) = 0$; $a_y(t) = a_0 = \text{constante}$

1. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$V(t) = \int a(t).dt$ avec les conditions initiales $V_x(t=0) = V_0$; $V_y(t=0) = 0$

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x(t) = V_{0x} \\ V_y(t) = a_0 \cdot t + V_{0y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_x(t) = V_0 \\ V_y(t) = a_0 \cdot t \end{cases}}$$

2. Equations horaires

$x(t) = \int V_x(t).dt$ et $y(t) = \int V_y(t).dt$ avec les conditions initiales $x(t=0) = y(t=0) = 0$

$$\begin{cases} V_x(t) = V_0 \\ V_y(t) = a_0 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0 \cdot t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = V_0 \cdot t \\ y(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 \end{cases}}$$

Equation de la trajectoire

$$t = \frac{x}{V_0} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{a_0}{2V_0^2} x^2}$$

3. Coordonnées du point limite $x_1 = d$.

$$x_1 = d \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{a_0 d^2}{2V_0^2}} \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{d}{V_0}$$

En remplaçant t_1 dans les composantes de la vitesse

$$\boxed{V_{1x} = V_0} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{1y} = \frac{a_0 d}{V_0}}$$

pour $x \in [d, 2d]$ $a_x(t) = 0$; $a_y(t) = 0$

4. $\vec{a} = \vec{0}$ le mouvement est donc rectiligne uniforme.**5. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :**

$V(t) = \int a(t).dt$ avec les conditions initiales $V_x(t'=0) = V_{1x} = V_0$; $V_y(t'=0) = V_{1y} = a_0 d / V_0$

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x(t') = V_{1x} \\ V_y(t') = V_{1y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} V_x(t') = V_0 \\ V_y(t') = a_0 d / V_0 \end{cases}}$$

Equations horaires

$$x(t') = \int V_x(t').dt' \quad \text{et} \quad y(t') = \int V_y(t').dt'$$

avec les conditions initiales $x(t'=0) = x_1 = d$ et $y(t'=0) = y_1 = a_0 d^2 / 2V_0^2$

$$\begin{cases} V_x(t') = V_0 \\ V_y(t') = \frac{a_0 d}{V_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t') = V_0 \cdot t' + x_0 \\ y(t') = \frac{a_0 d}{V_0} t' + y_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t') = V_0 \cdot t' + d \\ y(t') = \frac{a_0 d}{V_0} t' + \frac{a_0 d^2}{2V_0^2} \end{cases}}$$

Equation de la trajectoire

$$t' = \frac{x-d}{V_0} \Rightarrow y(x) = \frac{a_0 d}{V_0} \left(\frac{x-d}{V_0} \right) + \frac{a_0 d^2}{2V_0^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{y(x) = \frac{a_0 d}{V_0^2} x - \frac{a_0 d^2}{2V_0^2}}$$

6. Coordonnées du point limite $x_2 = 2d$.

$$x_2 = 2d \quad \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{3 a_0 d^2}{2 V_0^2}$$

7. $V_0 = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$, $d = 10 \text{ cm}$ et $y_2 = 12 \text{ cm}$

$$y_2 = \frac{3 a_0 d^2}{2 V_0^2} \quad \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{2 y_2 \cdot V_0^2}{3 d^2}$$

A. N.

$$a_0 = 3,2 \times 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

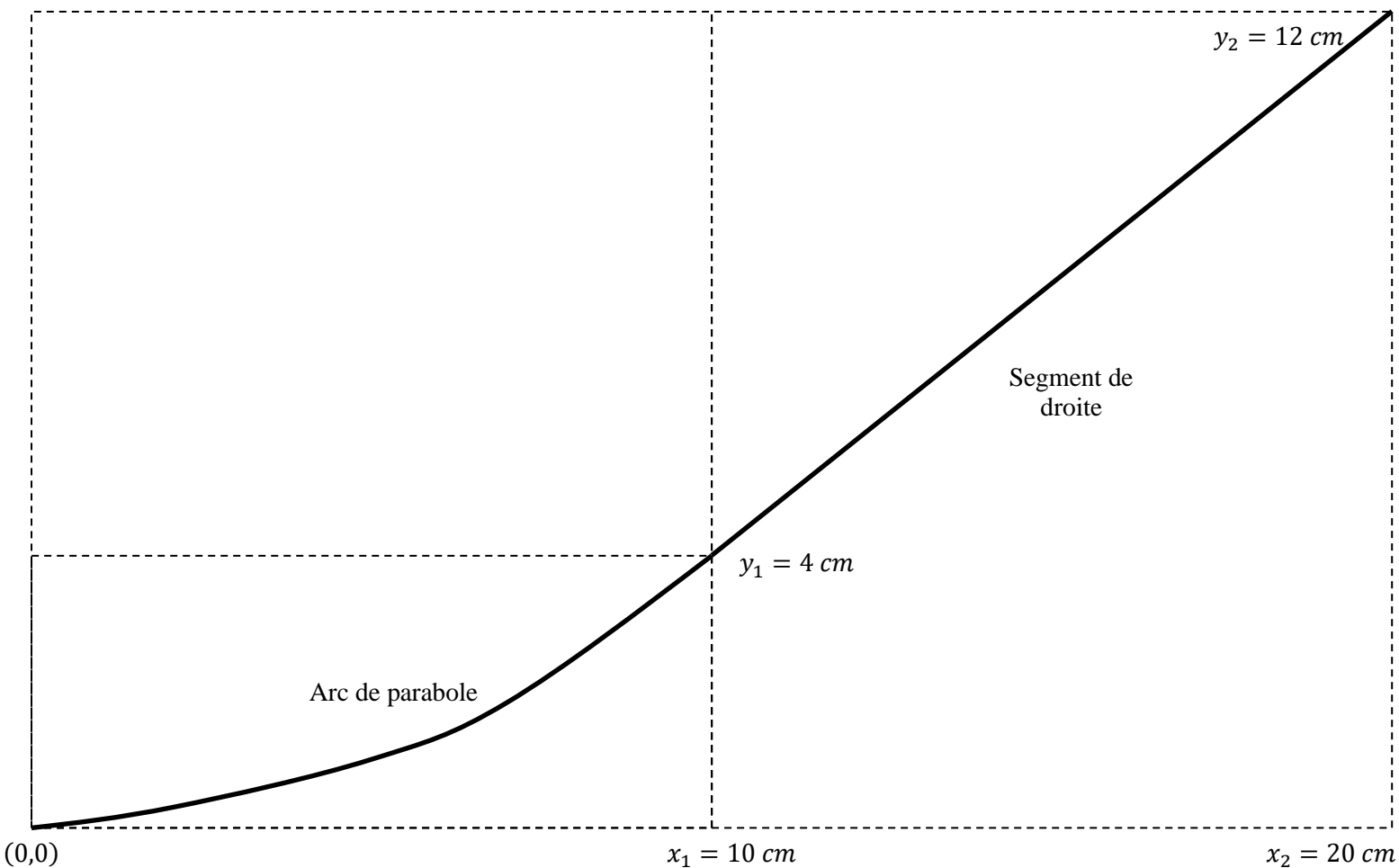
8. Représentation

$$y_1 = \frac{a_0 d^2}{2 V_0^2}$$

et

$$y_2 = \frac{3 a_0 d^2}{2 V_0^2} = 3y_1 \quad \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{y_2}{3} = 4 \text{ cm}$$



C'est le mouvement d'un électron dans un tube cathodique ; rayons cathodiques ; expérience de J.J. Thomson.

EXERCICE 12 :

$$\begin{cases} r(t) = R = \text{Constante} \\ \theta(t) = \alpha \cdot \ln(1 + \beta \cdot t) \end{cases}$$

1. Unités : $[\alpha] = \text{radian}$ et $[\beta] = 1/\text{seconde}$.

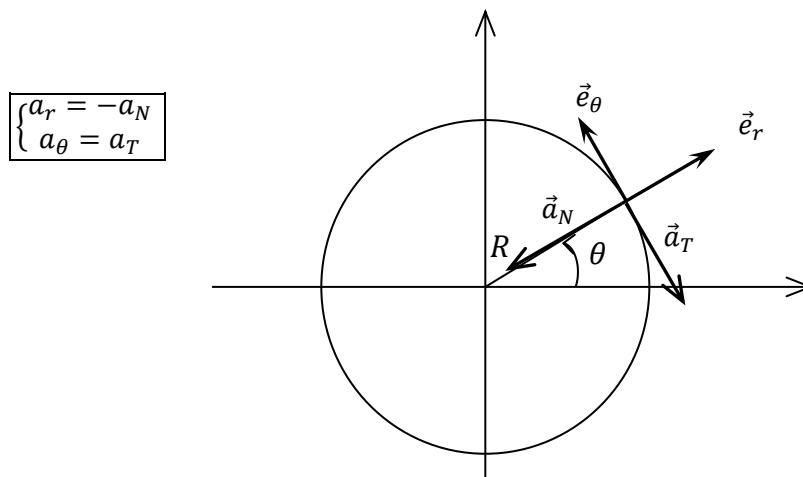
2.

$$\vec{V} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} V_r(t) = r \cdot \dot{\theta} = 0 \\ V_\theta(t) = r \cdot \theta \cdot \dot{\theta} = \frac{R \cdot \alpha \beta}{1 + \beta \cdot t} \end{cases}$$

3.

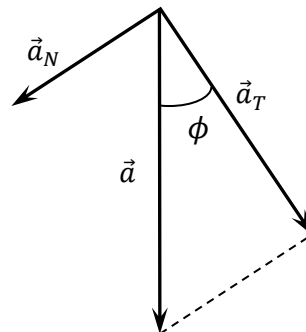
$$\vec{a} = (r \cdot \ddot{\theta} - r \cdot \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2 \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \theta \cdot \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{cases} a_r(t) = r \cdot \ddot{\theta} - r \cdot \dot{\theta}^2 = -\frac{R \cdot \alpha^2 \beta^2}{(1 + \beta \cdot t)^2} \\ a_\theta(t) = 2 \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \theta \cdot \ddot{\theta} = -\frac{R \cdot \alpha \beta^2}{(1 + \beta \cdot t)^2} \end{cases}$$

4. Puisque le mouvement est circulaire, alors les composantes radiale et transversale correspondent aux composantes normale et tangentielle respectivement.



5. L'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération est égal à l'angle entre l'accélération totale et l'accélération tangentielle :

$$\tan(\phi) = \frac{a_r}{a_\theta} = \alpha \Rightarrow \boxed{\phi = \arctan(\alpha)}$$



EXERCICE 13 :

1. Equations horaires

$$\begin{cases} r^{\bullet} = V_0 \\ \theta^{\bullet} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = V_0 \cdot t + r_0 \\ \theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0 \end{cases}$$

Calculons V_0 , r_0 , ω et θ_0 .

$$V_0 = \frac{20 \text{ cm}}{1 \text{ min}} = \frac{1}{300} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Constante} \quad ; \quad \omega = \theta^{\bullet} = \frac{-2\pi \text{ rad}}{1 \text{ min}} = -\frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{Constante}$$

Conditions initiales

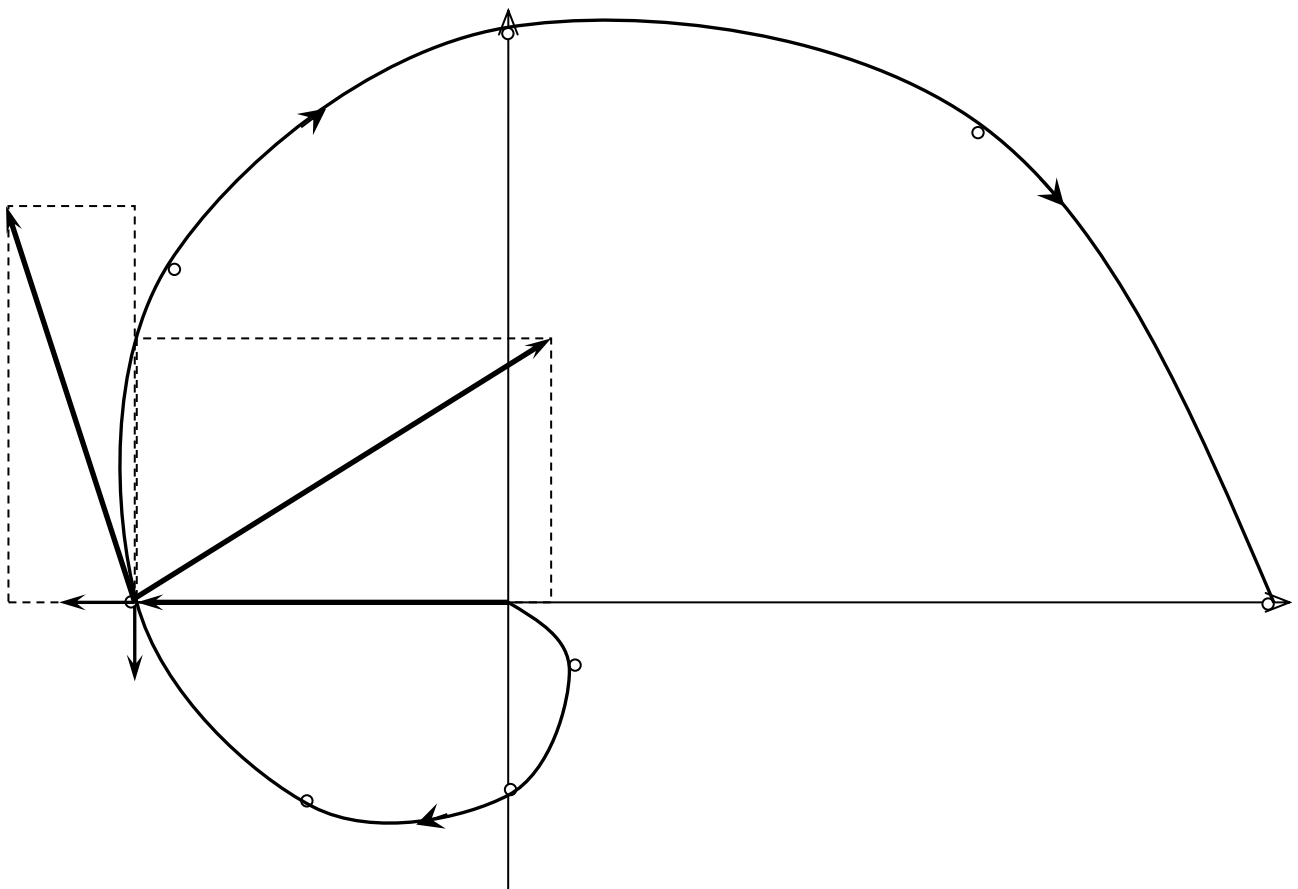
$$\text{à } t = 0 \text{ s} ; \quad \begin{cases} r(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} r(t) = V_0 \cdot t \\ \theta(t) = \omega \cdot t \end{cases} \quad \text{et numériquement} \quad \begin{cases} r(t) = (1/300) \cdot t \\ \theta(t) = (-\pi/30) \cdot t \end{cases}$$

2. Représentation

t	$t_0 = 0 \text{ s}$	$t_1 = 15 \text{ s}$	$t_2 = 30 \text{ s}$	$t_3 = 45 \text{ s}$	$t_4 = 60 \text{ s}$
$r \text{ (m)}$	0	0,5	0,1	0,15	0,2
$\theta \text{ (rad)}$	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$	-2π



(Echelle des vitesses : $1 \text{ cm} \rightarrow 2 \times 10^{-3} \text{ m/s}$) (Echelle des accélérations : $1 \text{ cm} \rightarrow 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$)

3. Vecteur vitesse

$$\vec{V} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V_0 \cdot \vec{e}_r + V_0 \omega \cdot t \cdot \vec{e}_\theta} \quad \text{numériquement} \quad \boxed{\vec{V} = \frac{1}{300} \left(\vec{e}_r - \frac{\pi}{30} t \cdot \vec{e}_\theta \right)}$$

Vecteur accélération

$$\vec{a} = (r \ddot{\theta} - r \cdot \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2 \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \theta \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = -V_0 \omega^2 t \cdot \vec{e}_r + 2V_0 \omega \cdot \vec{e}_\theta} \quad \text{numériquement} \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{\pi}{9000} \left(\frac{\pi}{30} t \cdot \vec{e}_r + 2 \cdot \vec{e}_\theta \right)}$$

4. Représentation des vecteurs vitesse et accélération (voir plus haut).

$$t = 30 \text{ s} ; \quad \begin{cases} r(30 \text{ s}) = 0,1 \text{ m} \\ \theta(30 \text{ s}) = -\pi \text{ rad} \end{cases} ; \quad \begin{cases} V_r(30 \text{ s}) = (1/300) \text{ m/s} \\ V_\theta(30 \text{ s}) = (-\pi/300) \text{ m/s} \end{cases} ; \quad \begin{cases} a_r(30 \text{ s}) = (-\pi^2/9000) \text{ m/s}^2 \\ a_\theta(30 \text{ s}) = (-2\pi/9000) \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

5. Accélération tangentielle

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} \quad \Rightarrow \quad V = V_0 \cdot \sqrt{1 + (\omega t)^2}$$

$$\boxed{a_T = \frac{dV}{dt} = V_0 \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + (\omega t)^2}}} \quad \text{numériquement à } t = 30 \text{ s} \quad \boxed{a_T(30 \text{ s}) = 3,31 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2}$$

6. Accélération normale

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}}$$

$$\text{numériquement à } t = 30 \text{ s} \quad \boxed{a(30 \text{ s}) = 12,98 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{a_N(30 \text{ s}) = 12,56 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2}$$

7. Rayon de courbure

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{V^2}{a_N}} \quad \text{numériquement à } t = 30 \text{ s} \quad \boxed{\rho(30 \text{ s}) = 0,096 \text{ m}}$$

EXERCICE 14 :

$$\begin{cases} r(t) = 2R_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \theta(t) = \omega \cdot t \end{cases} \quad \begin{cases} r^{\bullet} = 2R_0 \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \theta^{\bullet} = \omega \end{cases} \quad \begin{cases} r^{\bullet\bullet} = -2R_0 \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \theta^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}$$

9. Trajectoire :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2R_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = R_0 \cdot \sin(2\omega \cdot t) \\ y = 2R_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = R_0 \cdot [1 - \cos(2\omega \cdot t)] \end{cases}$$

D'où

$$\left(\frac{x}{R_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{R_0}\right)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + (y - R_0)^2 = R_0^2$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $(0, R_0)$ et de rayon R_0 .

10. Vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{V} = r^{\bullet} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \theta^{\bullet} \cdot \vec{e}_{\theta}$$

Donc

$$\vec{V} = 2R_0 \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_r + 2R_0 \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_{\theta} = 2R_0 \omega \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_r + \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_{\theta}]$$

Et son module

$$|\vec{V}| = V = 2R_0 \omega \cdot \sqrt{\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)}$$

D'où

$$V = 2R_0 \omega$$

11. Vecteur accélération :

$$\vec{a} = (r^{\bullet\bullet} - r \cdot \theta^{\bullet 2}) \vec{e}_r + (2 \cdot r^{\bullet} \theta^{\bullet} + r \cdot \theta^{\bullet\bullet}) \vec{e}_{\theta}$$

Et

$$\vec{a} = -4R_0 \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_r + 4R_0 \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_{\theta} = 4R_0 \omega^2 \cdot [-\sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_r + \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_{\theta}]$$

Et son module

$$|\vec{a}| = a = 4R_0 \omega^2$$

Accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = 0$$

Accélération normale :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = a$$

En remplaçant

$$a_N = 4R_0 \omega^2$$

12. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V^2}{a_N}$$

En remplaçant

$$\rho = R_0$$

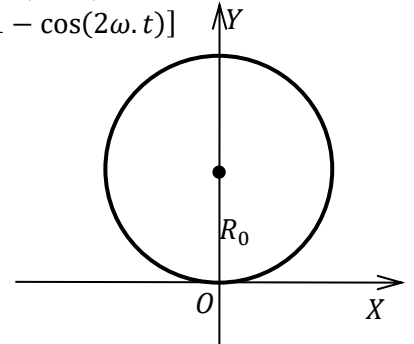
Conclusion le mouvement est circulaire ($\rho = \text{Cte}$) uniforme ($V = \text{Cte}$).

13. Vecteur unitaire tangent :

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{V}}{V} \Rightarrow \vec{e}_T = \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_r + \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_{\theta}$$

Vecteur unitaire normal :

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{a}_N}{a_N} = \frac{\vec{a}}{a} \Rightarrow \vec{e}_N = -\sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_r + \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_{\theta}$$



EXERCICE 15 :

1. Nature du mouvement.

AB	$0 \leq t \leq 20 \text{ s}$	$a_T = \text{Constante} = a$	Mouvement rectiligne uniformément varié
BC	$20 \leq t \leq 30 \text{ s}$	$a_T = 0 \quad (a \neq a_T)$	Mouvement circulaire uniforme
CD	$30 \leq t \leq 40 \text{ s}$	$a_T = a = 0$	Mouvement rectiligne uniforme
DA	$40 \leq t \leq 60 \text{ s}$	$a_T = \text{Constante} \neq a$	Mouvement circulaire uniformément varié

2.

AB	$0 \leq t \leq 20 \text{ s}$	$V > 0$	$a_T > 0$	Mouvement accélééré
BC	$20 \leq t \leq 30 \text{ s}$	$V = \text{Constante}$	$a_T = 0$	Mouvement uniforme
CD	$30 \leq t \leq 40 \text{ s}$	$V = \text{Constante}$	$a_T = 0$	Mouvement uniforme
DA	$40 \leq t \leq 60 \text{ s}$	$V > 0$	$a_T < 0$	Mouvement décélééré

3. Vitesse du coureur au point B.

Le déplacement est égal à l'aire sous le diagramme des vitesses

$$D = \frac{(60 + 20) \times V}{2} = 400 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 10 \text{ m/s}}$$

4. Rayons R des demi-cercles BC et DA.

La circonférence du cercle étant égale à $2\pi \cdot R$. Donc, pour un demi cercle :

$$\pi \cdot R = BC = DA = 100 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 31,83 \text{ m}}$$

5. Expression de la vitesse en fonction du temps $V(t)$.

AB	$0 \leq t \leq 20 \text{ s}$	$V_1(t) = a_T \cdot t + V_{01}$	$V_1(t) = 0,5 \cdot t$
BC	$20 \leq t \leq 30 \text{ s}$	$V_2(t') = V_{02} = \text{Constante}$	$V_2(t') = 10$
CD	$30 \leq t \leq 40 \text{ s}$	$V_3(t'') = V_{03} = \text{Constante}$	$V_3(t'') = 10$
DA	$40 \leq t \leq 60 \text{ s}$	$V_4(t''') = a_T \cdot t''' + V_{04}$	$V_4(t''') = -0,5 \cdot t''' + 10$

6. L'accélération normale et tangentielle.

	M_1	M_2	M_3
$a_N = V^2/R$	$a_N = 0$	$a_N = 3,14 \text{ m/s}^2$	$a_N = 1,57 \text{ m/s}^2 (*)$
$a_T = dV/dt$	$a_T = 0,5 \text{ m/s}^2$	$a_T = 0$	$a_T = -0,5 \text{ m/s}^2$

(*) Calcul de la vitesse au point M_3 .

Le mouvement étant circulaire uniformément varié, alors

$$V_{M_3}^2 - V_D^2 = 2 \cdot a_T \cdot M_3D$$

Avec

$$a_T = -0,5 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad V_D = 10 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad M_3D = 50 \text{ m}$$

Donc

$$V_{M_3}^2 = 50 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \text{et} \quad a_N = V_{M_3}^2/R = 1,57 \text{ m/s}^2$$

7. Représentation des vecteurs vitesses et accélérations.

(Echelle des vitesses : $2 \text{ m/s} \rightarrow 1 \text{ cm}$; Echelle des accélérations : $1 \text{ m/s}^2 \rightarrow 2 \text{ cm}$)

	M_1	M_2	M_3
	$V = 7,071 \text{ m/s}$ (*)	$V = 10 \text{ m/s}$	$V = 7,071 \text{ m/s}$
$a_N = V^2/R$	$a_N = 0$	$a_N = 3,14 \text{ m/s}^2$	$a_N = 1,57 \text{ m/s}^2$
$a_T = dV/dt$	$a_T = 0,5 \text{ m/s}^2$	$a_T = 0$	$a_T = -0,5 \text{ m/s}^2$

(*) Calcul de la vitesse au point M_1 .

Le mouvement étant rectiligne uniformément varié, alors

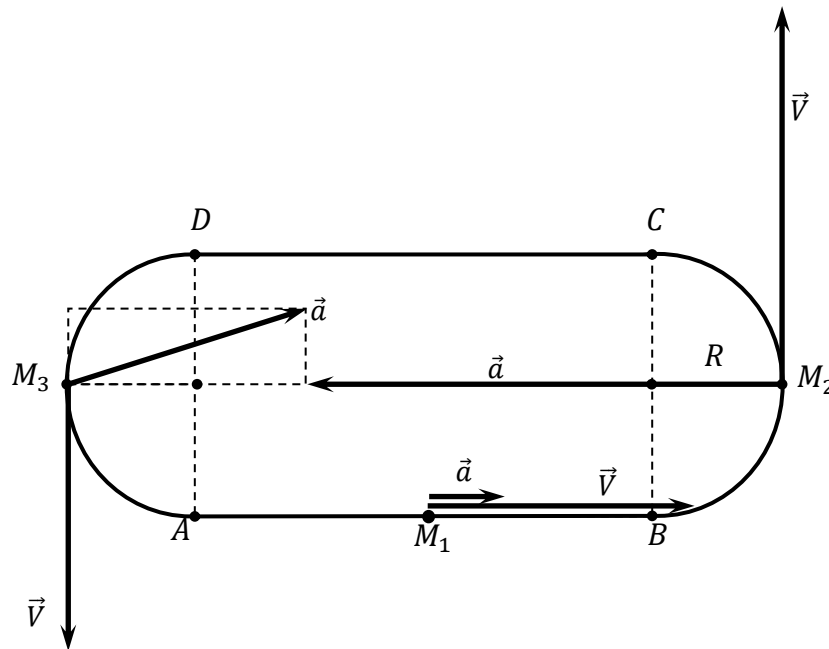
$$V_{M_1}^2 - V_A^2 = 2 \cdot a \cdot AM_1$$

Avec

$$a = a_T = 0,5 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad V_A = 0 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad AM_1 = 50 \text{ m}$$

Donc

$$V_{M_1}^2 = 50 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \text{et} \quad V_{M_1} = 7,071 \text{ m/s}$$



EXERCICE 16 :

1.

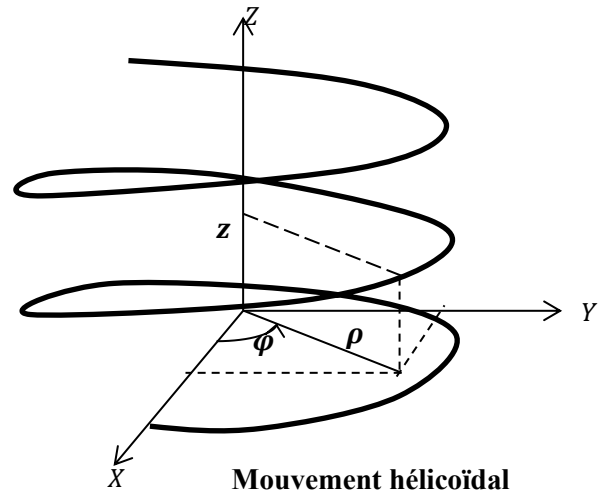
$$\begin{cases} x(t) = b \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ z(t) = c \cdot \omega \cdot t \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\varphi) \\ y = \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \rho = b = \text{Cte} \\ \varphi = \omega \cdot t \\ z = c \cdot \omega \cdot t \end{cases}$$



2.

Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \rho^{\bullet} \cdot \vec{e}_{\rho} + \rho \cdot \varphi^{\bullet} \cdot \vec{e}_{\varphi} + z^{\bullet} \cdot \vec{e}_z$$

D'où

$$\boxed{\vec{V} = b \cdot \omega \cdot \vec{e}_{\varphi} + c \cdot \omega \cdot \vec{e}_z}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = (\rho^{\bullet\bullet} - \rho \cdot \varphi^{\bullet 2}) \cdot \vec{e}_{\rho} + (2\rho^{\bullet} \cdot \varphi^{\bullet} + \rho \cdot \varphi^{\bullet\bullet}) \cdot \vec{e}_{\varphi} + z^{\bullet\bullet} \cdot \vec{e}_z$$

D'où

$$\boxed{\vec{a} = -b \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_{\rho}}$$

$b = 0 \Rightarrow (x(t) = 0 ; y(t) = 0 ; z(t) = c \cdot \omega \cdot t) : \text{Mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe } OZ.$

$c = 0 \Rightarrow (x(t) = b \cdot \cos(\omega \cdot t) ; y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t) ; z(t) = 0) : \text{Mouvement circulaire uniforme dans le plan } OXY.$

EXERCICE 17 :

$$x(t) = b \cdot \cos(\gamma \cdot t^2) \quad ; \quad y(t) = b \cdot \sin(\gamma \cdot t^2) \quad ; \quad z(t) = b \cdot \gamma \cdot t^2$$

En coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\varphi) \\ y = \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = b = \text{Cte} \\ \varphi = \gamma \cdot t^2 \\ z = b \cdot \gamma \cdot t^2 \end{cases}$$

1.

Vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

D'où

$$\vec{V} = 2b\gamma \cdot t \cdot (\vec{e}_\varphi + \vec{e}_z)$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \cdot \dot{\varphi} + \rho \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$$

D'où

$$\vec{a} = -4b\gamma^2 \cdot t^2 \cdot \vec{e}_\rho + 2b\gamma \cdot \vec{e}_\varphi + 2b\gamma \cdot \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{a} = 2b\gamma \cdot (-2\gamma \cdot t^2 \cdot \vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z)$$

2.

Module de la vitesse : $V = |\vec{V}| = |2b\gamma \cdot t| \cdot \sqrt{1+1} \Rightarrow V = 2\sqrt{2} \cdot b\gamma \cdot t$

Accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = 2\sqrt{2} \cdot b\gamma$$

Module de l'accélération : $a = |\vec{a}| = |2b\gamma| \cdot \sqrt{(-2\gamma \cdot t^2)^2 + 1 + 1} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \cdot b\gamma \cdot \sqrt{2\gamma^2 \cdot t^4 + 1}$

Accélération normale :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2$$

D'où

$$a_N^2 = 8 \cdot b^2 \gamma^2 (2\gamma^2 \cdot t^4 + 1) - 8 \cdot b^2 \gamma^2 = 16 \cdot b^2 \gamma^4 \cdot t^4$$

Et

$$a_N = 4 \cdot b\gamma^2 \cdot t^2$$

3. Rayon de courbure :

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{8 \cdot b^2 \gamma^2 \cdot t^2}{4 \cdot b\gamma^2 \cdot t^2}$$

D'où

$$\rho = 2b$$

EXERCICE 18 :

$$r(t) = R = \text{Cte} \quad ; \quad \theta(t) = \omega \cdot t \quad ; \quad \varphi(t) = 12 \cdot \omega \cdot t$$

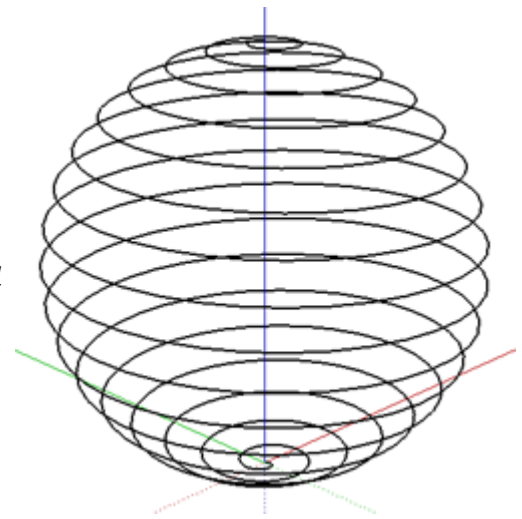
$$R = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \omega = \pi/3 \text{ rad/s}$$

1. Description de la trajectoire : Spirale sphérique.
(Figure ci-contre).

2. $t = 1 \text{ s}$

$$r(1 \text{ s}) = 5 \text{ cm} \quad ; \quad \theta(1 \text{ s}) = \pi/3 \text{ rad} \quad ; \quad \varphi(1 \text{ s}) = 4\pi \text{ rad}$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) = 5\sqrt{3}/2 \\ y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) = 0 \\ z = r \cdot \cos(\theta) = 5/2 \end{cases}$$



3. $z = -R = R \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \theta = \pi \text{ rad}$
Donc

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{t = 3 \text{ s}}$$

4. $\vec{V} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{V} = R \cdot \omega \cdot \vec{e}_\theta + 12R \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_\varphi$

A $t = 3 \text{ s}$:

$$\boxed{\vec{V} = \frac{5\pi}{3} \vec{e}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{V = \frac{5\pi}{3}}$$