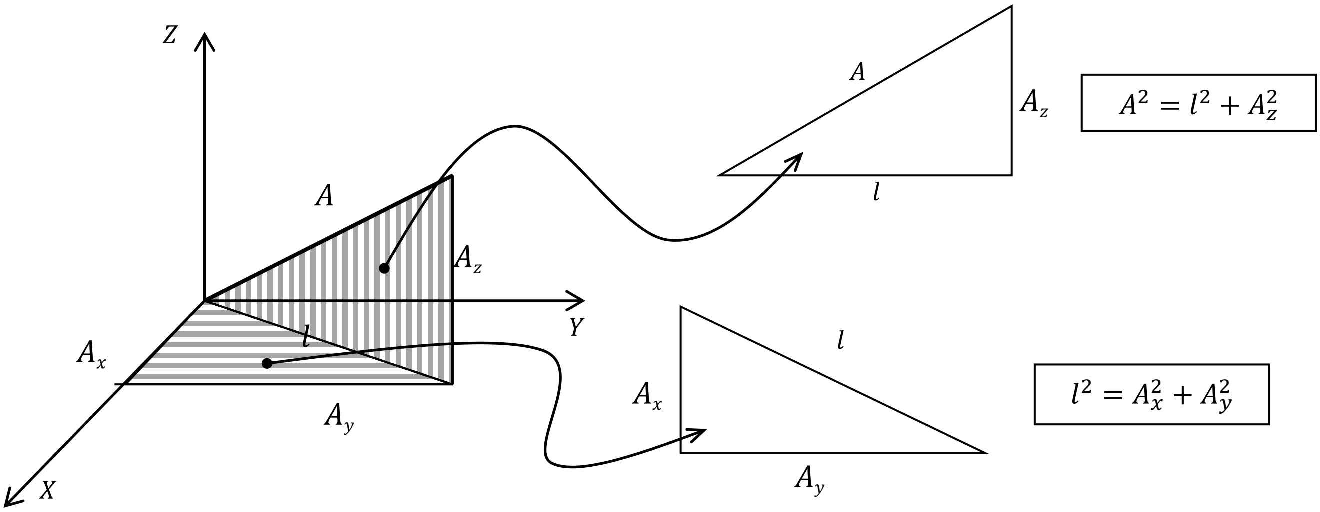
CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 01

EXERCICE 01 :

1. En utilisant le théorème de Pythagore pour les triangles droits de la figure ci-dessous.

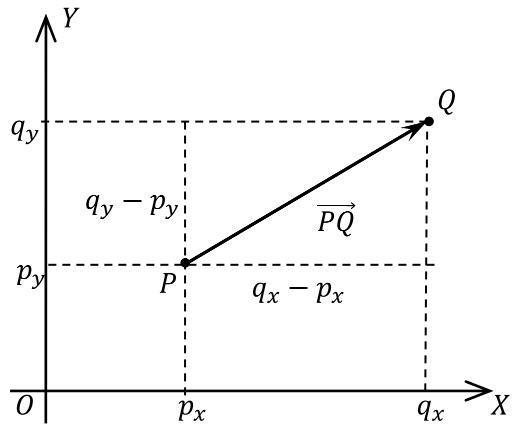


Donc

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad \text{et} \qquad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

2. Représentation à deux dimensions

$$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \end{pmatrix}$$



Dans l’espace à trois dimensions

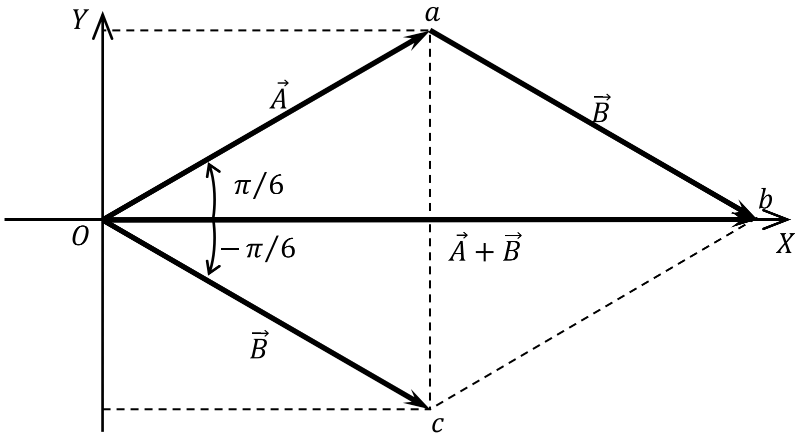
$$\boxed{\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}}$$

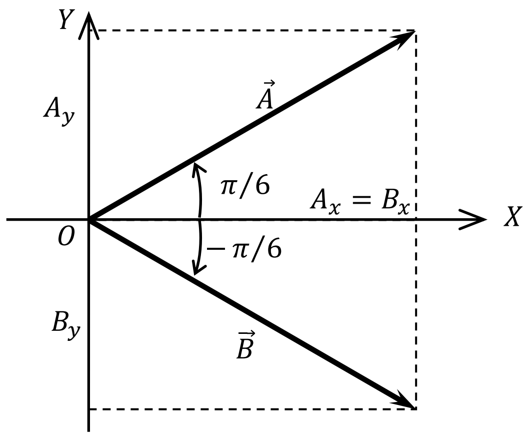
Et le module

$$\boxed{\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + \left(q_y - p_y\right)^2 + (q_z - p_z)^2}}$$

EXERCICE 02 :

Calculer graphiquement, puis en utilisant les composantes, la résultante de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ayant le même module $(A = B = 10)$ et dont les angles respectifs avec l'axe (OX) sont $(\vec{A}, \vec{e}_x) = \alpha = \pi/6$ et $(\vec{B}, \vec{e}_x) = -\alpha = -\pi/6$.





Graphiquement :

D'après la construction graphique, la résultante $\vec{A}+\vec{B}$ est parallèle à l'axe (OX). En effet, La résultante est une des diagonales Ob et ac du losange $Oabc$ formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. l'autre diagonale ac est perpendiculaire à l'axe (OX) qui est une bissectrice du triangle isocèle Oac. les deux diagonales du losange étant perpendiculaires, il vient que la diagonale Ob formée par la résultante est parallèle à l'axe (OX).

La direction et le sens étant connus, il nous reste à déterminer le module de la résultante.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Le triangle Oab étant isocèle et ac la bissectrice perpendiculaire à la base Ob. Donc

$$\cos\alpha = \frac{C/2}{A} \qquad \Rightarrow \qquad C = 2A.\cos\alpha$$

Et le vecteur $\vec{C}$.

$$\boxed{\vec{C} = +2A.\cos\alpha\,.\,\vec{e}_x = +17{,}3.\,\vec{e}_x}$$

Analytiquement :

On projette les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans le repère cartésien (OXY).

$$\vec{A}\begin{pmatrix} A.\cos\alpha \\ A.\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B}\begin{pmatrix} B.\cos\alpha \\ -B.\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Mais puisque $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ont le même module $(A = B)$, la résultante

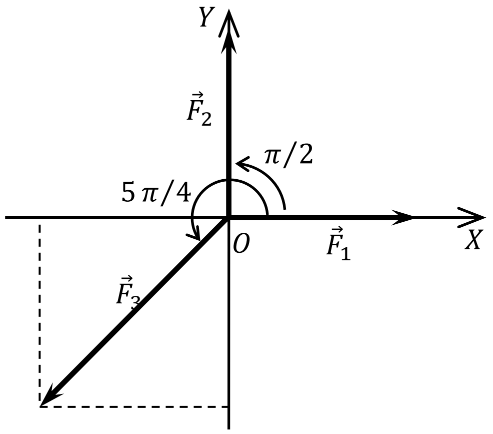
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} A.\cos\alpha \\ A.\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B.\cos\alpha \\ -B.\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A.\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

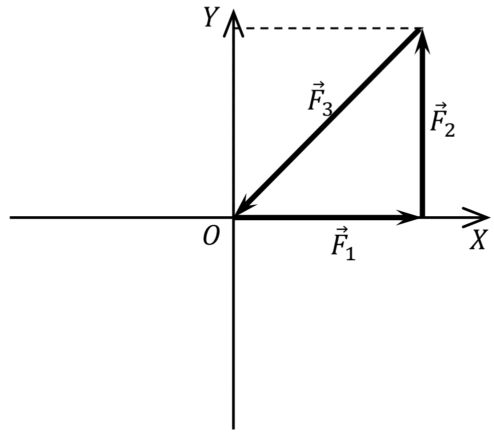
Et

$$\boxed{\vec{C} = +2A.\cos\alpha\,.\,\vec{e}_x = +17{,}3.\,\vec{e}_x}$$

Montrer (graphiquement et analytiquement) que la somme des vecteurs de force suivant est nulle.

$\vec{F}_1 \begin{cases} \text{Module} & |\vec{F}_1| = 5\ N \\ \text{Angle} & (\vec{F}_1, \vec{e}_x) = 0 \end{cases}$; $\vec{F}_2 \begin{cases} \text{Module} & |\vec{F}_2| = 5\ N \\ \text{Angle} & (\vec{F}_2, \vec{e}_x) = \pi/2 \end{cases}$; $\vec{F}_3 \begin{cases} \text{Module} & |\vec{F}_3| = 5\sqrt{2}\ N \\ \text{Angle} & (\vec{F}_3, \vec{e}_x) = 5\,\pi/4 \end{cases}$





Graphiquement :

La somme des trois vecteurs

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}' + \vec{F}_3 \qquad \text{avec} \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}'$$

Comme $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont perpendiculaires et de même module $(F_1 = F_2)$, ils forment donc un carré dont $\vec{F}'$ est une des diagonales. Le module de $\vec{F}'$ est donné par le théorème de Pythagore

$$F' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{2.F_1^2} \quad \Rightarrow \quad F' = \sqrt{2}.F_1 = 5\sqrt{2}$$

Sa direction fait un angle de 45° avec l'axe (OX).

D'où le vecteur à le même module $\left(F' = F_3 = 5\sqrt{2}\ N\right)$, la même direction et le sens opposé au vecteur $\vec{F}_3$. Si bien que :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}' + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Analytiquement :

Faisons la projection des trois vecteurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ dans le repère cartésien (OXY).

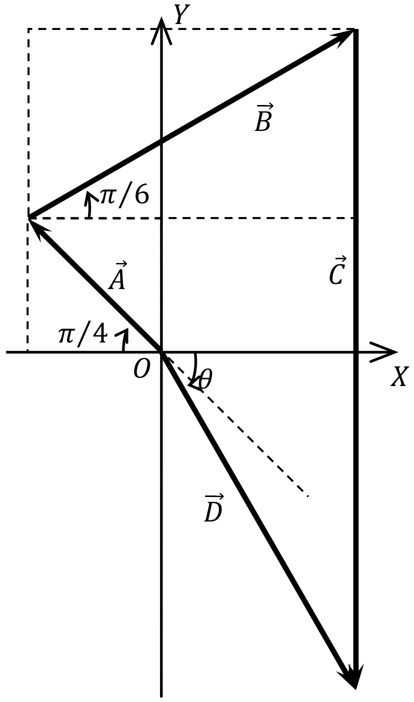
$$\vec{F}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{F}_3 \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}.\cos(5\,\pi/4) \\ 5\sqrt{2}.\sin(5\,\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2}.(\sqrt{2}/2) \\ -5\sqrt{2}.(\sqrt{2}/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

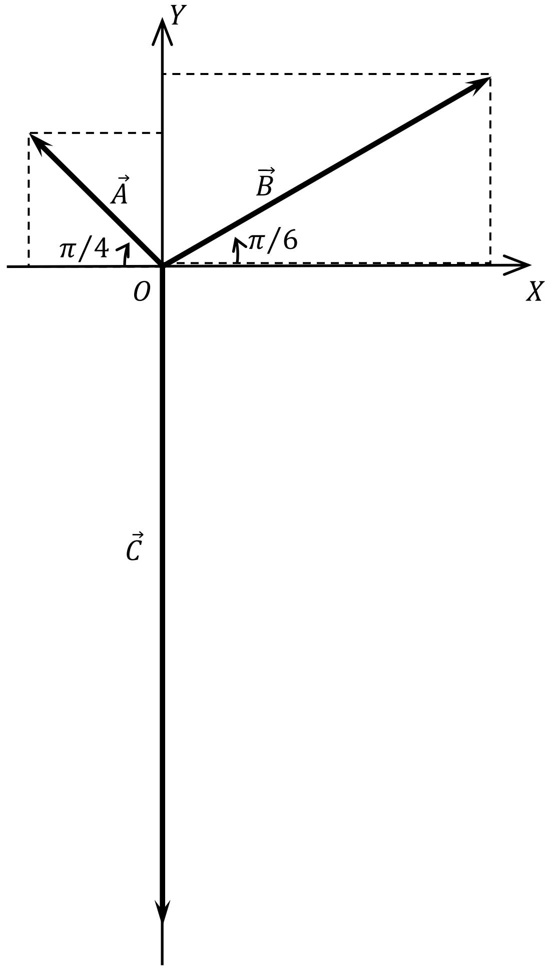
Et la résultante

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

EXERCICE 03 :

Trouver, graphiquement et analytiquement, la somme ou la résultante des déplacements suivants :
$\vec{A}$: $10\ m$ nord-ouest ; $\vec{B}$: $20\ m$ 30° vers le nord-est ; $\vec{C}$: $35\ m$ plein sud.





Graphiquement :

On représente les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ à l'échelle (ici : $1\ cm \rightarrow 4\ m$)
$\vec{A}$: Module $10\ m$ ($2{,}5\ cm$ sur papier) ; angle $\left(\vec{A}, \vec{e}_x\right) = 3\pi/4$.
$\vec{B}$: Module $20\ m$ ($5\ cm$ sur papier) ; angle $\left(\vec{B}, \vec{e}_x\right) = \pi/6$.
$\vec{C}$: Module $35\ m$ ($8{,}75\ cm$ sur papier) ; angle $\left(\vec{C}, \vec{e}_x\right) = 3\pi/2$.

Le module de la résultante $\vec{D}$ est **<u>mesuré</u>** avec une règle : environ $5\ cm$ sur papier $\Rightarrow$ $\left|\vec{D}\right| \approx 20\ m$
Et l'angle $\left(\vec{D}, \vec{e}_x\right) = \theta$ est **<u>mesuré</u>** avec un rapporteur : $\theta \approx -60°$

Analytiquement :

Faisons la projection des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ dans le repère cartésien (OXY).

$$\vec{A}\begin{pmatrix} 10.\cos(3\pi/4) \\ 10.\sin(3\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ +5\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B}\begin{pmatrix} 20.\cos(\pi/6) \\ 20.\sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{3} \\ 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Et la résultante

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ +5\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\sqrt{3} \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -35 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{D}\begin{pmatrix} 10{,}249 \\ -17{,}929 \end{pmatrix}$$

Son module $\left|\vec{D}\right| = 20{,}652\ m$

Et l'angle $\left(\vec{D}, \vec{e}_x\right) = \theta$: $\tan\theta = D_y/D_x = -1{,}749 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\,60{,}246°$

EXERCICE 04 :

1. $\boxed{\vec{A}\bullet\vec{B} = A.B.\cos(\theta)}$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

2. $\boxed{\vec{A}\bullet\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z}$.

3. $\vec{A}\bullet\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z = 2 + 1 - 1 = 1$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A.B.\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta) = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{A.B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

4. On donne : $\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ et $\vec{B} = 2.\vec{e}_x + 10.\vec{e}_y - 11.\vec{e}_z$.

   a. $\vec{A}\bullet\vec{B} = 4 + 10 - 11 = 3$.

$$|\vec{A}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad ; \quad |\vec{B}| = \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A.B.\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{A.B} = \frac{3}{15\sqrt{6}} = 0{,}0816 \quad \text{et} \quad \boxed{\theta = 85{,}316°}$$

   b. $\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = 4.\vec{e}_x + 11.\vec{e}_y - 10.\vec{e}_z}$ et son module $\boxed{|\vec{C}| = \sqrt{16+121+100} = \sqrt{237}}$.

   c. Trouver l'angle que fait cette résultante avec les axes OX, OY et OZ.

Les angles α, β, γ formés, respectivement, par $\vec{C}$ avec les axes OX, OY, OZ sont les mêmes que les angles formés par avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.

$$\vec{C}\bullet\vec{e}_x = (4).(1) + (11).(0) + (-10).(0) = 4.$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{237} \quad ; \quad |\vec{e}_x| = \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$\vec{C}\bullet\vec{e}_x = |\vec{C}|.|\vec{e}_x|.\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{C}\bullet\vec{e}_x}{|\vec{C}|.|\vec{e}_x|} = \frac{4}{\sqrt{237}} = 0{,}2598 \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = 74{,}94°}$$

$$\vec{C}\bullet\vec{e}_y = (4).(0) + (11).(1) + (-10).(0) = 11.$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{237} \quad ; \quad |\vec{e}_y| = \sqrt{0+1+0} = 1$$

$$\vec{C}\bullet\vec{e}_y = |\vec{C}|.|\vec{e}_y|.\cos(\beta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\beta) = \frac{\vec{C}\bullet\vec{e}_y}{|\vec{C}|.|\vec{e}_y|} = \frac{11}{\sqrt{237}} = 0{,}7145 \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = 44{,}39°}$$

$$\vec{C}\bullet\vec{e}_z = (4).(0) + (11).(0) + (-10).(1) = -10.$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{237} \quad ; \quad |\vec{e}_z| = \sqrt{0+0+1} = 1$$

$$\vec{C}\bullet\vec{e}_z = |\vec{C}|.|\vec{e}_z|.\cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = \frac{\vec{C}\bullet\vec{e}_z}{|\vec{C}|.|\vec{e}_z|} = \frac{-10}{\sqrt{237}} = -0{,}6495 \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma = 130{,}509°}$$

EXERCICE 05 :

Soit les vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{D}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{E}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

Le produit scalaire étant commutatif

$\vec{A}\bullet\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z = -2 + 0 - 8 = -10 \quad \Rightarrow$ $\vec{A}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{B}$.

$\vec{A}\bullet\vec{C} = A_x.C_x + A_y.C_y + A_z.C_z = -2 + 2 + 2 = 2 \quad \Rightarrow$ $\vec{A}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{C}$.

$\vec{A}\bullet\vec{D} = A_x.D_x + A_y.D_y + A_z.D_z = -3 + 1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow$ **$\vec{A}$ est perpendiculaire à $\vec{D}$**.

$\vec{A}\bullet\vec{E} = A_x.E_x + A_y.E_y + A_z.E_z = -2 + 0 + 0 = -2 \quad \Rightarrow$ $\vec{A}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{E}$.

$\vec{B}\bullet\vec{C} = B_x.C_x + B_y.C_y + B_z.C_z = 4 + 0 - 4 = 0 \quad \Rightarrow$ **$\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{C}$**.

$\vec{B}\bullet\vec{D} = B_x.D_x + B_y.D_y + B_z.D_z = 6 + 0 - 4 = 2 \quad \Rightarrow$ $\vec{B}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{D}$.

$\vec{B}\bullet\vec{E} = B_x.E_x + B_y.E_y + B_z.E_z = 4 + 0 + 0 = 4 \quad \Rightarrow$ $\vec{B}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{E}$.

$\vec{C}\bullet\vec{D} = C_x.D_x + C_y.D_y + C_z.D_z = 6 + 2 + 1 = 9 \quad \Rightarrow$ $\vec{C}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{D}$.

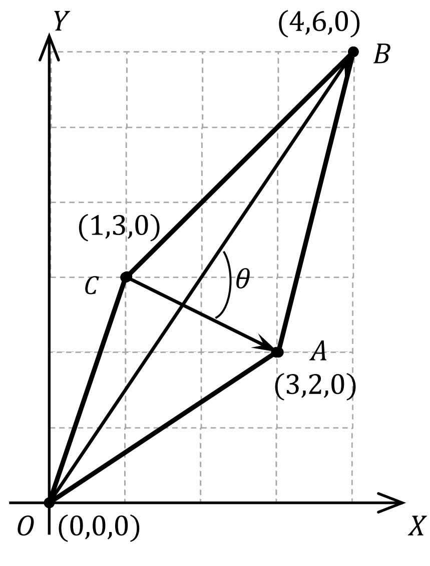
$\vec{C}\bullet\vec{E} = C_x.E_x + C_y.E_y + C_z.E_z = 4 + 0 + 0 = 4 \quad \Rightarrow$ $\vec{C}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{E}$.

$\vec{D}\bullet\vec{E} = D_x.E_x + D_y.E_y + D_z.E_z = 6 + 0 + 0 = 6 \quad \Rightarrow$ $\vec{D}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{E}$.

EXERCICE 06 :

a. Trouvez l'angle aigu formé par les diagonales d'un quadrilatère de sommets $(0,0,0)$, $(3,2,0)$, $(4,6,0)$, $(1,3,0)$.

Remarquez que tous les points se trouvent dans le plan (OXY).
L'angle formé par les diagonales OB et CA, est le même compris entre les deux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CA}$.



$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}4-0\\6-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3-1\\2-3\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Le produit scalaire

$$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{CA} = (4).(2) + (6).(-1) + (0).(0) = 2.$$

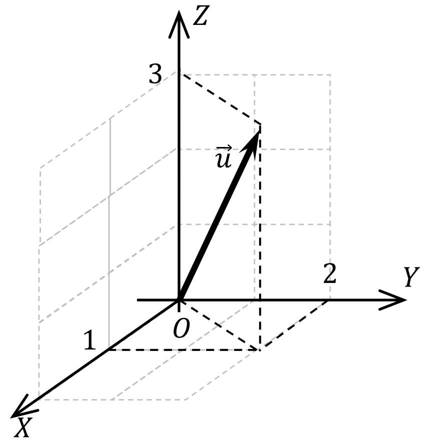
$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{52} \quad ; \quad |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{OB}|.|\overrightarrow{CA}|.\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{OB}|.|\overrightarrow{CA}|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{52\sqrt{5}}} = 0{,}124 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\theta = 82{,}875°}$$

b. Trouvez les angles (α, β, γ) que forme le vecteur $\vec{u} = \vec{e}_x + 2.\vec{e}_y + 3.\vec{e}_z$ respectivement avec les axes (OX, OY, OZ).

les angles (α, β, γ) entre le vecteur $\vec{u}$ et les axes (OX, OY, OZ) respectivement. Sont les mêmes angles entre le vecteur $\vec{u}$ et les vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \; ; \; \vec{e}_x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; ; \; \vec{e}_y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \; ; \; \vec{e}_z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Les produits scalaires

$$\vec{u}\bullet\vec{e}_x = (1).(1) + (2).(0) + (3).(0) = 1.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{e}_x| = \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$\vec{u}\bullet\vec{e}_x = |\vec{u}|.|\vec{e}_x|.\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\bullet\vec{e}_x}{|\vec{u}|.|\vec{e}_x|} = \frac{1}{\sqrt{14}} = 0{,}267 \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = 74{,}499°}$$

$$\vec{u}\bullet\vec{e}_y = (1).(0) + (2).(1) + (3).(0) = 2.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{e}_y| = \sqrt{0+1+0} = 1$$

$$\vec{u}\bullet\vec{e}_y = |\vec{u}|.|\vec{e}_y|.\cos(\beta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\beta) = \frac{\vec{u}\bullet\vec{e}_y}{|\vec{u}|.|\vec{e}_y|} = \frac{2}{\sqrt{14}} = 0{,}535 \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = 57{,}688°}$$

$$\vec{u}\bullet\vec{e}_z = (1).(0) + (2).(0) + (3).(1) = 3.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{e}_z| = \sqrt{0+0+1} = 1$$

$$\vec{u}\bullet\vec{e}_z = |\vec{u}|.|\vec{e}_z|.\cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \cos(\gamma) = \frac{\vec{u}\bullet\vec{e}_z}{|\vec{u}|.|\vec{e}_z|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = 0{,}802 \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma = 36{,}699°}$$

EXERCICE 07 :

Soit les vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{C}\begin{pmatrix}2\\\alpha\\4\end{pmatrix}$

1.

$$\vec{A}+\vec{B} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad ; \qquad \vec{A}-\vec{B} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})\bullet(\vec{A}-\vec{B}) = (1).(-3) + (1).(1) + (2).(-6) = -14$$

Et la valeur absolue

$$\boxed{|(\vec{A}+\vec{B})\bullet(\vec{A}-\vec{B})| = 14}$$

2.

$$\vec{A} \perp \vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\bullet\vec{C} = A_x.C_x + A_y.C_y + A_z.C_z = -2 + \alpha - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 10}$$

3.

$$\vec{A} \parallel \vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = k.\vec{C} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_x = k.C_x \\ A_y = k.C_y \\ A_z = k.C_z \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} -1 = 2k \\ 1 = k.\alpha \\ -2 = 4k \end{cases} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$

D'après la première et la troisième équation $k = -1/2$

La deuxième équation donne $\boxed{\alpha = -2}$

EXERCICE 08 :

$$\vec{F} = 5.\vec{e}_x + 2.\vec{e}_y - 2.\vec{e}_z \ (N) \quad ; \quad \vec{L} = 3.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y - 4.\vec{e}_z \ (m) .$$

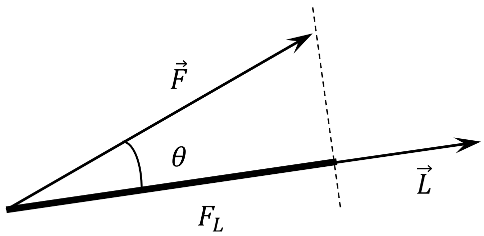
1. Travail de la force $\vec{F}$.

$$W = \vec{F} \bullet \vec{L} = (5).(3) + (2).(3) + (-2).(-4) = 29 \ Joules$$

2. La projection de la force $\vec{F}$ suivant le vecteur $\vec{L}$.

$$\vec{F} \bullet \vec{L} = F.L.\cos\theta = F_L.L$$

$$F_L = F.\cos\theta$$



F_L est la projection (valeur algébrique) du vecteur $\vec{F}$ dans la direction du vecteur $\vec{L}$.

$$L = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$$

$$\boxed{F_L = \frac{\vec{F} \bullet \vec{L}}{L}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{F_L = \frac{29}{\sqrt{34}}}$$

3. Vecteur unitaire $\vec{e}_F$ dans la direction de la force $\vec{F}$.

$$\vec{e}_F = \frac{\vec{F}}{F} \qquad \text{avec} \qquad F = \sqrt{25+4+4} = \sqrt{33}$$

Donc

$$\boxed{\vec{e}_F = \frac{5}{\sqrt{33}}\vec{e}_x + \frac{2}{\sqrt{33}}\vec{e}_y - \frac{2}{\sqrt{33}}\vec{e}_z}$$

4. Travail nul.

$$W = \vec{F} \bullet \vec{D} = 0$$

D'où

$$\boxed{5x + 2y - 2z = 0}$$

5. C'est l'équation du plan perpendiculaire à la force $\vec{F}$ et passant par le point d'origine O. Tous les déplacements dans ce plan sont perpendiculaires à la force et donc, le travail suivant ces déplacements est nul.

EXERCICE 09 :

1. $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z\right) \times \left(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z\right)$$

En distribuant

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_xB_x(\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + A_xB_y(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + A_xB_z(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) + A_yB_x(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + A_yB_y(\vec{e}_y \times \vec{e}_y) + A_yB_z(\vec{e}_y \times \vec{e}_z) + A_zB_x(\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + A_zB_y(\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + A_zB_z(\vec{e}_z \times \vec{e}_z)$$

En remplaçant les produits vectoriels des vecteurs unitaires

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_xB_x.\vec{0} + A_xB_y(\vec{e}_z) + A_xB_z(-\vec{e}_y) + A_yB_x(-\vec{e}_z) + A_yB_y.\vec{0} + A_yB_z(\vec{e}_x) + A_zB_x(\vec{e}_y) + A_zB_y(-\vec{e}_x) + A_zB_z.\vec{0}$$

Donc

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{e}_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{e}_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{e}_z \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Le calcul du déterminant

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{e}_x-\left(A_xB_z-A_zB_x\right)\vec{e}_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{e}_z \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

En comparant les équation (1) et (2).

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

En utilisant l'équation

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\bullet\vec{A}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)A_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)A_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)A_z$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\bullet\vec{A}=A_xA_yB_z-A_xA_zB_y+A_yA_zB_x-A_xA_yB_z+A_xA_zB_y-A_yA_zB_x=0$$

De la même manière

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\bullet\vec{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)B_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)B_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)B_z$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\bullet\vec{B}=A_yB_xB_z-A_zB_xB_y+A_zB_xB_y-A_xB_yB_z+A_xB_yB_z-A_yB_xB_z=0$$

Donc

$\vec{A}\times\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{A}\times\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.

2. $\vec{A}=\vec{e}_x+5.\vec{e}_y+2.\vec{e}_z$ et $\vec{B}=-\vec{e}_x-\vec{e}_y-\vec{e}_z$.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & 5 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-5-(-2)\\ -\left(-1-(-2)\right)\\ -1-(-5)\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ +4\end{pmatrix}}$$

3. Calculez $\left|\left(2\vec{A}+\vec{B}\ \right)\times\left(\vec{A}-2\vec{B}\right)\right|$.

$$2\vec{A}+\vec{B}=2\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{A}-2\vec{B}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}$$

$$\left(2\vec{A}+\vec{B}\ \right)\times\left(\vec{A}-2\vec{B}\right)=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 1 & 9 & 3\\ 3 & 7 & 4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}36-21\\ -(4-9)\\ 7-27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\5\\-20\end{pmatrix}$$

Et le module

$$\boxed{\left|\left(2\vec{A}+\vec{B}\ \right)\times\left(\vec{A}-2\vec{B}\right)\right|=\sqrt{225+25+400}=5\sqrt{26}}$$

4. Trouvez un vecteur unitaire perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Le vecteur $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ est perpendiculaire par définition aux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Il reste à en déduire un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{C}$.

$$\vec{u}=\frac{\vec{C}}{C}=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u}=\frac{-3.\vec{e}_x-\vec{e}_y+4.\vec{e}_z}{\sqrt{9+1+16}}$$

D'où

$$\boxed{\vec{u}=-\frac{3}{\sqrt{26}}\vec{e}_x-\frac{1}{\sqrt{26}}\vec{e}_y+\frac{4}{\sqrt{26}}\vec{e}_z}$$

EXERCICE 10 :

1. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \begin{cases} \text{Module : } C = A.B.\sin(\theta) \\ \text{Direction : } \perp \quad au\ plan\ (\vec{A},\vec{B}) \\ \text{Sens : Règle de la Main droite} \end{cases}}$$

2. $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$ en coordonnées cartésienne.

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{e}_x - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{e}_z}$$

3. $\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y$ et $\vec{B} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ -(-2-0) \\ 2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4. La surface du parallélogramme déterminé par les vecteurs :

$\vec{V} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ et $\vec{V'} = 2.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y - 3.\vec{e}_z$ est égale au module de leur produit vectoriel.

$$\vec{V} \times \vec{V'} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et le module} \quad \boxed{|\vec{V} \times \vec{V'}| = S = \sqrt{131}}$$

5. La surface du triangle de sommets $P(1,3,2)$, $Q(2,-1,-1)$ et $R(-1,2,3)$ est égale à la moitié de la surface du parallélogramme formé à partir des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et le module} \quad |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{155}$$

Et la surface du triangle

$$\boxed{S_{\text{triangle}} = \frac{\sqrt{155}}{2}}$$

EXERCICE 11 :

$I = 10\,A$; $\vec{L} = 2.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y\ (m)$; $\vec{B} = 10^{-2}.\vec{e}_y + 10^{-3}.\vec{e}_z\ (Tesla)$.

1. Trouvez le vecteur $\vec{F}$ (unité : *Newton*).

$$\vec{L}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 10^{-3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times10^{-3} \\ -2\times10^{-3} \\ 2\times10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{F} = I.\vec{L}\times\vec{B} = 0{,}03.\vec{e}_x - 0{,}02.\vec{e}_y + 0{,}2.\vec{e}_z}$$

2. Trouvez l'angle aigu formé par les deux vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{B}$.

$$|\vec{L}\times\vec{B}| = L.B.\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{|\vec{L}\times\vec{B}|}{L.B}$$

$$|\vec{L}\times\vec{B}| = 10^{-2}\sqrt{0{,}09+0{,}04+4} \approx 2\times10^{-2}$$

$$L = \sqrt{13} \qquad \text{et} \qquad B = 10^{-2}\sqrt{1+0{,}01} \approx 10^{-2}$$

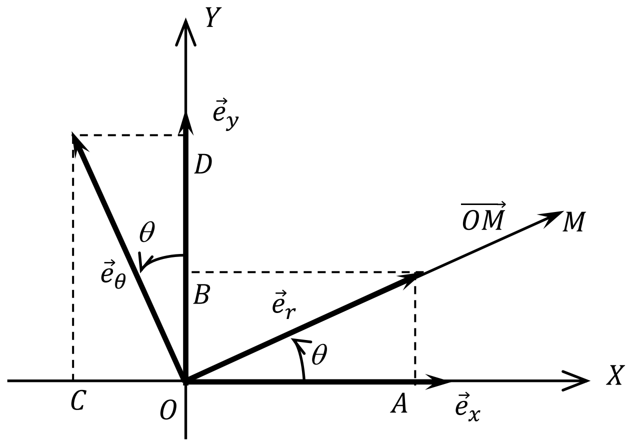
D'où

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0{,}5547 \qquad \text{et} \qquad \boxed{\theta = 33{,}69°}$$

EXERCICE 12 :

$\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dirigé suivant $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

$\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, dirigé suivant les θ croissants.



Cherchons les composantes de $\vec{e}_r$ et de $\vec{e}_\theta$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. (Voir la figure ci-contre).

$$\vec{e}_r = A.\vec{e}_x + B.\vec{e}_y$$

En projetant

$$\cos\theta = \frac{A}{|\vec{e}_r|} = \frac{A}{1} \quad \Rightarrow \quad A = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{B}{|\vec{e}_r|} = \frac{B}{1} \quad \Rightarrow \quad B = \sin\theta$$

D'où

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos\theta\,.\,\vec{e}_x + \sin\theta\,.\,\vec{e}_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

De la même manière

$$\vec{e}_\theta = C.\vec{e}_x + D.\vec{e}_y$$

En projetant

$$\sin\theta = \frac{-C}{|\vec{e}_\theta|} = \frac{-C}{1} \quad \Rightarrow \quad C = -\sin\theta \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \frac{D}{|\vec{e}_\theta|} = \frac{D}{1} \quad \Rightarrow \quad D = \cos\theta$$

D'où

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,.\,\vec{e}_x + \cos\theta\,.\,\vec{e}_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

En faisant $(1).\cos\theta - (2).\sin\theta$ on trouve : $\boxed{\vec{e}_x = \cos\theta\,.\,\vec{e}_r - \sin\theta\,.\,\vec{e}_\theta}$

En faisant $(1).\sin\theta + (2).\cos\theta$ on trouve : $\boxed{\vec{e}_y = \sin\theta\,.\,\vec{e}_r + \cos\theta\,.\,\vec{e}_\theta}$

EXERCICE 13 :

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad M_1 \begin{cases} r_1 = 6 \\ \theta_1 = \pi/6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6.\cos(\pi/6) = 3\sqrt{3} \\ y_1 = 6.\sin(\pi/6) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad M_2 \begin{cases} r_2 = 4 \\ \theta_2 = 2\pi/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4.\cos(2\pi/3) = -2 \\ y_2 = 4.\sin(2\pi/3) = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

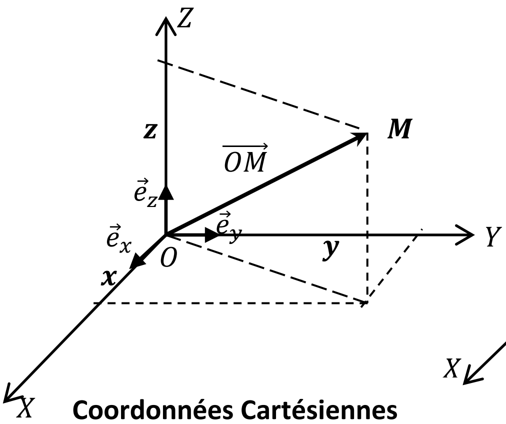
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases} \quad ; \quad M_1' \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{0+4} = 2 \\ \theta_1 = \arctan(2/0) = \pi/2 \end{cases}$$

Remarque :

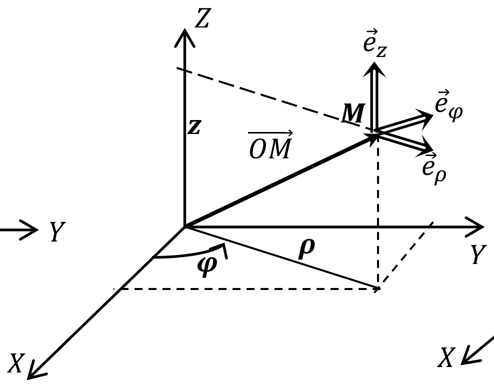
pour $x = 0$, $\tan\theta = y/x$ devient infini. Donc $\theta = \pm\pi/2$ $\begin{cases} \text{pour} \quad y > 0 \quad ; \ \theta = +\pi/2 \\ \text{pour} \quad y < 0 \quad ; \ \theta = -\pi/2 \end{cases}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases} \quad ; \quad M_2' \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ \theta_2 = \arctan(2/2) = \pi/4 \end{cases}$$

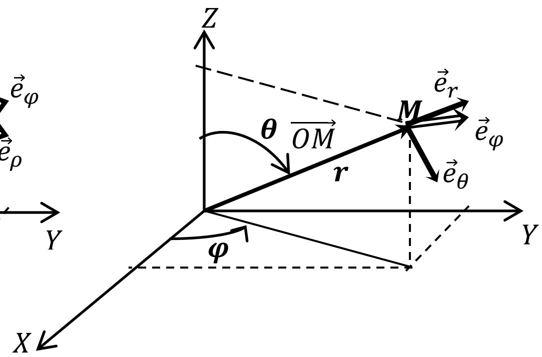
EXERCICE 14 :



Coordonnées Cartésiennes



Coordonnées Cylindriques



Coordonnées Sphériques

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = V.\sin\theta.\cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = V.\sin\theta.\sin\varphi} \\ \boldsymbol{z = V.\cos\theta} \end{cases} \quad \boldsymbol{avec} \quad \begin{cases} \boldsymbol{V = 13} \\ \boldsymbol{\theta = 23°} \\ \boldsymbol{\varphi = 37°} \end{cases} \quad \boldsymbol{donc} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 13.sin(23°).cos(37°) = 4,057} \\ \boldsymbol{y = 13.sin(23°).sin(37°) = 3,057} \\ \boldsymbol{z = 13.cos(23°) = 11,967} \end{cases}$$

EXERCICE 15 :

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{C} = C_x\vec{e}_x + C_y\vec{e}_y + C_z\vec{e}_z$$

$$(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix} = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

D'autre part le déterminant donne

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

En comparant il vient que

$$\boxed{\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}}$$

$$\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y - 3.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = \vec{e}_x - 2.\vec{e}_y + \vec{e}_z \quad ; \quad \vec{C} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y - 4.\vec{e}_z$$

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2.(8-1) - 1.(-4+1) - 3.(1-2) = 20$$

$$\vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.(1-6) - 1.(2+3) - 4.(-4-1) = 20$$

$$\vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-3+4) + 2.(3+8) + 1.(-1-2) = 20$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 8-1 \\ -(-4+1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1+9 \\ -(-2+21) \\ 6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ -(2+3) \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -5 & -5 & -5 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 20+5 \\ -(20-5) \\ -5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 16 :

Pour montrer que $\vec{A} = 3.\vec{e}_x - 2.\vec{e}_y - 2.\vec{e}_z$; $\vec{B} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$; $\vec{C} = -2.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y - 2.\vec{e}_z$ appartiennent au même plan il faut trouver un vecteur qui leur soit perpendiculaire.

Le produit vectoriel de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs.

$$\vec{D} = \vec{A} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} \perp \vec{A} \text{ et } \vec{D} \perp \vec{B}$$

Reste à démontrer que ce vecteur est aussi perpendiculaire au vecteur $\vec{C}$. Donc :

$$\vec{D} \perp \vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} \bullet \vec{D} = 0$$

Ce qui nous ramène à démontrer que

$$\vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = 0}$$

Qui est le produit mixte.

Le calcul donne

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 3.(-2-0) + 2.(-2-0) - 2.(-3-2) = 0$$

Donc $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ appartiennent au même plan.

Autre manière :

Puisque la valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs, alors, dans le cas où les trois vecteurs appartiennent au même plan ce volume est nul et par conséquent le produit mixte est aussi nul.

EXERCICE 17 :

$$\vec{\boldsymbol{A}} \bullet (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} & \boldsymbol{A_z} \\ \boldsymbol{B_x} & \boldsymbol{B_y} & \boldsymbol{B_z} \\ \boldsymbol{C_x} & \boldsymbol{C_y} & \boldsymbol{C_z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)}$$

Donc

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = A_xB_yC_z - A_xB_zC_y + A_yB_zC_x - A_yB_xC_z + A_zB_xC_y - A_zB_yC_x$$

$$\vec{\boldsymbol{C}} \bullet (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C_x} & \boldsymbol{C_y} & \boldsymbol{C_z} \\ \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} & \boldsymbol{A_z} \\ \boldsymbol{B_x} & \boldsymbol{B_y} & \boldsymbol{B_z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{C_x(A_yB_z - A_zB_y) + C_y(A_zB_x - A_xB_z) + C_z(A_xB_y - A_yB_x)}$$

Donc

$$\vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = A_yB_zC_x - A_zB_yC_x + A_zB_xC_y - A_xB_zC_y + A_xB_yC_z - A_yB_xC_z$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} \bullet (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B_x} & \boldsymbol{B_y} & \boldsymbol{B_z} \\ \boldsymbol{C_x} & \boldsymbol{C_y} & \boldsymbol{C_z} \\ \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} & \boldsymbol{A_z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{B_x(C_yA_z - C_zA_y) + B_y(C_zA_x - C_xA_z) + B_z(C_xA_y - C_yA_x)}$$

Donc

$$\vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A}) = A_zB_xC_y - A_yB_xC_z + A_xB_yC_z - A_zB_yC_x + A_yB_zC_x - A_xB_zC_y$$

En comparant terme à terme, nous trouvons que :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}}\bullet(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})=\vec{\boldsymbol{C}}\bullet(\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}})=\vec{\boldsymbol{B}}\bullet(\vec{\boldsymbol{C}}\times\vec{\boldsymbol{A}})}$$

Calculons $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$.

$$(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}B_yC_z-B_zC_y\\ B_zC_x-B_xC_z\\ B_xC_y-B_yC_x\end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{pmatrix}A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\\ A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)\\ A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)\end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}\times(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z}\\ \boldsymbol{A_zB_yC_z-A_zB_zC_y-A_xB_xC_y+A_xB_yC_x}\\ \boldsymbol{A_xB_zC_x-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z+A_yB_zC_y}\end{pmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{cases}\vec{A}\bullet\vec{C}=A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\\ \vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{cases}$$

Donc

$$\vec{B}.(\vec{A}\bullet\vec{C})=\begin{pmatrix}A_xB_xC_x+A_yB_xC_y+A_zB_xC_z\\ A_xB_yC_x+A_yB_yC_y+A_zB_yC_z\\ A_xB_zC_x+A_yB_zC_y+A_zB_zC_z\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{C}.(\vec{A}\bullet\vec{B})=\begin{pmatrix}A_xB_xC_x+A_yB_yC_x+A_zB_zC_x\\ A_xB_xC_y+A_yB_yC_y+A_zB_zC_y\\ A_xB_xC_z+A_yB_yC_z+A_zB_zC_z\end{pmatrix}$$

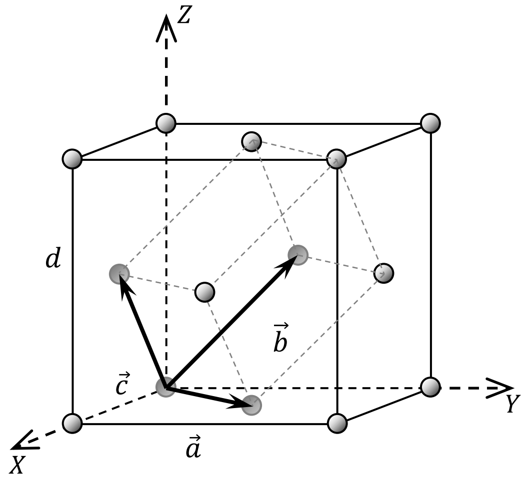
Alors

$$\vec{B}.(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}.(\vec{A}\bullet\vec{B})=\begin{pmatrix}A_yB_xC_y+A_zB_xC_z-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x\\ A_xB_yC_x+A_zB_yC_z-A_xB_xC_y-A_zB_zC_y\\ A_xB_zC_x+A_yB_zC_y-A_xB_xC_z-A_yB_yC_z\end{pmatrix}$$

En comparant terme à terme, nous trouvons que :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}}\times(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}})=\vec{\boldsymbol{B}}.(\vec{\boldsymbol{A}}\bullet\vec{\boldsymbol{C}})-\vec{\boldsymbol{C}}.(\vec{\boldsymbol{A}}\bullet\vec{\boldsymbol{B}})}$$

EXERCICE 18 :



1. Composantes des vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Coordonnées du sommet (origine des vecteurs) (0,0,0).

Coordonnées des milieux des faces :
Dans le plan $(OXY) \rightarrow (d/2\,, d/2\,, 0)$.
Dans le plan $(OYZ) \rightarrow (0, d/2\,, d/2)$.
Dans le plan $(OXZ) \rightarrow (d/2\,, 0, d/2)$.

D'où les composantes des vecteurs :

$$\vec{a} = \frac{d}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \frac{d}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{c} = \frac{d}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. En utilisant la règle de la main droite, les vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, dans cet ordre, forment un trièdre direct.

3. Quelle est la valeur de l'angle γ entre deux vecteurs différents du système $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 (1.0 + 1.1 + 0.1) = \frac{d^2}{4}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a.b.\cos\gamma \qquad \text{avec} \quad a = b = \frac{d}{2}\sqrt{2}$$

En faisant l'égalité

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{a.b} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{\pi}{3}\, rad}$$

Le même angle est trouvé entre $(\vec{a}, \vec{c})$ et $(\vec{b}, \vec{c})$.

4. Volume du parallélépipède définit par les trois vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$V = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \left(\frac{d}{2}\right)^3 . \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$V = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \left(\frac{d}{2}\right)^3 . \big(1.(1.1 - 0) - 1.(0 - 1.1) + 0.(0 - 1.1)\big) = \left(\frac{d}{2}\right)^3 .2$$

Donc

$$\boxed{V = \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c}) = \frac{1}{4} d^3}$$

EXERCICE 19 :

$$\vec{r}(t) = (t^3 + 2.t).\vec{e}_x + 3.e^{-2t}\,\vec{e}_y + 2.\sin(5t)\,.\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (3.t^2 + 2).\vec{e}_x - 6.e^{-2t}\,\vec{e}_y + 10.\cos(5t)\,.\vec{e}_z \quad ; \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(3.t^2 + 2) + 36.e^{-4t} + 100.\cos^2(5t)}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 6t.\vec{e}_x + 12.e^{-2t}\,\vec{e}_y - 50.\sin(5t)\,.\vec{e}_z \quad ; \quad \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{36.t^2 + 144.e^{-4t} + 250.\sin^2(5t)}$$

EXERCICE 20 :

1. Montrons que :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t)\right) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

$$\vec{A}(t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B}(t) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} dA_x/dt \\ dA_y/dt \\ dA_z/dt \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B}(t) = \begin{pmatrix} dB_x/dt \\ dB_y/dt \\ dB_z/dt \end{pmatrix}$$

Calculons les produits scalaires

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) = \frac{dA_x}{dt}B_x + \frac{dA_y}{dt}B_y + \frac{dA_z}{dt}B_z$$

Et

$$\vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

D’où le deuxième terme de l’égalité s’écrit

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{dA_x}{dt}B_x + A_x\frac{dB_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt}B_y + A_y\frac{dB_y}{dt} + \frac{dA_z}{dt}B_z + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A_xB_x) + \frac{d}{dt}\left(A_yB_y\right) + \frac{d}{dt}(A_zB_z) = \frac{d}{dt}\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right)$$

Finalement

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t)\right)$$

2. $\vec{A}(t) = 3t^2.\vec{e}_x + 2t^3.\vec{e}_y - t.\vec{e}_z$ et $\vec{B}(t) = 3t.\vec{e}_x + 2t^2.\vec{e}_y + t^2.\vec{e}_z$.

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 6t.\vec{e}_x + 6t^2.\vec{e}_y - \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{B}(t)}{dt} = 3.\vec{e}_x + 4t.\vec{e}_y + 2t.\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = 6t.3t + 6t^2.2t^2 + (-1).t^2 + 3t^2.3 + 2t^3.4t + (-t).2t$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t)\right) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = 20t^4 + 24t^2$$

Autrement

$$\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t) = 3t^2.3t + 2t^3.2t^2 + (-t).t^2 = 4t^5 + 8t^3$$

Et la dérivée

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t)\right) = \frac{d}{dt}(4t^5 + 8t^3) = 20t^4 + 24t^2$$

EXERCICE 21 :

$$\vec{A}(t) = (3t^2 - 1).\vec{e}_x + (2t - 3).\vec{e}_y + (6t^2 - 4t).\vec{e}_z$$

$$\int_{t=1}^{t=2} \vec{A}(t).dt = \left\{\int_{t=1}^{t=2} (3t^2 - 1).dt\right\}.\vec{e}_x + \left\{\int_{t=1}^{t=2} (2t - 3).dt\right\}.\vec{e}_y + \left\{\int_{t=1}^{t=2} (6t^2 - 4t).dt\right\}.\vec{e}_z$$

$$\int_{t=1}^{t=2} \vec{A}(t).dt = [t^3 - t + C_1]_1^2.\vec{e}_x + [t^2 - 3t + C_2]_1^2.\vec{e}_y + [2t^3 - 2t^2 + C_3]_1^2.\vec{e}_z$$

$$\int_{t=1}^{t=2} \vec{A}(t).dt = (6 - 0).\vec{e}_x + (-2 + 2).\vec{e}_y + (8 - 0).\vec{e}_z$$

$$\boxed{\int_{t=1}^{t=2} \vec{A}(t).dt = 6.\vec{e}_x + 8.\vec{e}_z}$$

EXERCICE 22 :

$$f(x,y,z) = x^2.y.z \qquad \text{et} \qquad \vec{A} = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ y.z^2 \\ -x.z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f.\vec{A} = x^2.y.z \begin{pmatrix} 3x^2y \\ y.z^2 \\ -x.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^4y^2z \\ x^2y^2z^3 \\ -x^3yz^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(f.\vec{A})}{\partial z} = \begin{pmatrix} 3x^4y^2 \\ 3x^2y^2z^2 \\ -2x^3yz \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2(f.\vec{A})}{\partial y \partial z} = \begin{pmatrix} 6x^4y \\ 6x^2yz^2 \\ -2x^3z \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial^2(f.\vec{A})}{\partial y \partial z}\right|_{(1,-2,-1)} = \begin{pmatrix} 6.1^4.(-2) \\ 6.1^2.(-2).(-1)^2 \\ -2.1^3.(-1) \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\left.\frac{\partial^2(f.\vec{A})}{\partial y \partial z}\right|_{(1,-2,-1)} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ +2 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 23 :

$$\vec{A} = \cos\theta \,.\, \vec{e}_x + \sin\theta \,.\, \vec{e}_y \qquad \text{tel que} \qquad \theta = \omega.t$$

1. Module de $\vec{A}$.

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A} \text{ est un } \textit{\textbf{vecteur unitaire}}.$$

2.

$$\vec{A}_1 = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_y\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{A}_1 = -\omega.\sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_x + \omega.\cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_y}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{d\vec{A}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\,.\,\vec{e}_x + \sin\theta\,.\,\vec{e}_y\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{A}_2 = -\sin\theta\,.\,\vec{e}_x + \cos\theta\,.\,\vec{e}_y}$$

3. Module d*e $\vec{A}_2$.

$$A_2 = |\vec{A}_2| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}_2 \text{ est un } \textit{\textbf{vecteur unitaire}}.$$

4. Montrez que les vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ sont parallèles, et que $\vec{A}_2$ est perpendiculaire à $\vec{A}$.

$$\vec{A}_1 = -\omega.\sin(\omega t)\,.\,\vec{e}_x + \omega.\cos(\omega t)\,.\,\vec{e}_y = -\omega.\sin\theta\,.\,\vec{e}_x + \omega.\cos\theta\,.\,\vec{e}_y$$

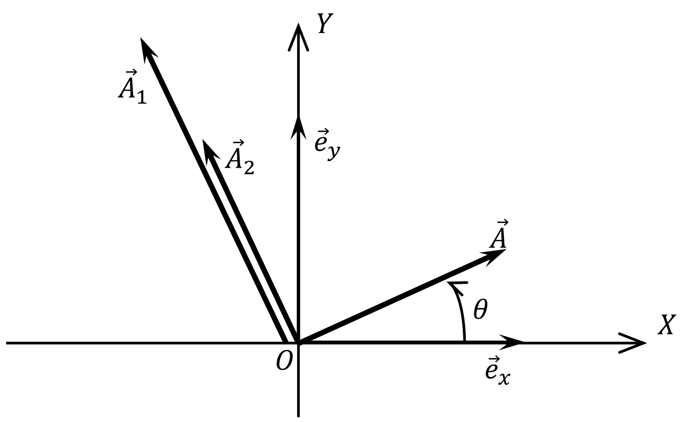
$$\vec{A}_1 = \omega.\vec{A}_2$$

Donc $\vec{A}_1$ est parallèle à $\vec{A}_2$. (Dans le même sens si $\omega > 0$; sens opposé si $\omega < 0$).

$$\vec{A}_2 \bullet \vec{A} = \left(-\sin\theta\,.\,\vec{e}_x + \cos\theta\,.\,\vec{e}_y\right) \bullet \left(\cos\theta\,.\,\vec{e}_x + \sin\theta\,.\,\vec{e}_y\right) = 0$$

Donc $\vec{A}_2 \perp \vec{A}$.

5. Représentez les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.



EXERCICE 24 :

$$f(x,y,z) = x^3yz^2 \quad \text{et} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} xyz \\ z^2 \\ 2y^2z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f.\vec{A} = x^3yz^2 \begin{pmatrix} xyz \\ z^2 \\ 2y^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4y^2z^3 \\ x^3yz^4 \\ 2x^3y^3z^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial(x^3yz^2)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(x^3yz^2)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(x^3yz^2)}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f(x,y,z) = 3x^2yz^2.\vec{e}_x + x^3z^2.\vec{e}_y + 2x^3yz.\vec{e}_z}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial(xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2y^2z)}{\partial z}$$

$$\boxed{div(\vec{A}) = \vec{\nabla}\bullet\vec{A}(x,y,z) = yz + 0 + 2y^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xyz & z^2 & 2y^2z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4yz - 2z \\ -(0 - xy) \\ 0 - xz \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4yz - 2z \\ xy \\ -xz \end{pmatrix}}$$

$$div(f.\vec{A}) = \frac{\partial(f.A_x)}{\partial x} + \frac{\partial(f.A_y)}{\partial y} + \frac{\partial(f.A_z)}{\partial z} = \frac{\partial(x^4y^2z^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^3yz^4)}{\partial y} + \frac{\partial(2x^3y^3z^3)}{\partial z} =$$

$$\boxed{div(f.\vec{A}) = \vec{\nabla}\bullet(f.\vec{A}) = 4x^3y^2z^3 + x^3z^4 + 6x^3y^3z^2}$$

$$\overrightarrow{rot}(f.\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f.A_x & f.A_y & f.A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^4y^2z^3 & x^3yz^4 & 2x^3y^3z^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^3y^2z^3 - 4x^3yz^3 \\ -(6x^2y^3z^3 - 3x^4y^2z^2) \\ 3x^3yz^4 - 2x^4yz^3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(f.\vec{A}) = \vec{\nabla}\times(f.\vec{A}) = x^2yz^2\begin{pmatrix} 6xyz - 4xz \\ 3x^2y - 6y^2z \\ 3xz^2 - 2x^2z \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 25 :

$$\vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z \quad ; \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\overrightarrow{grad}(r) = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(r) = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(r) = \frac{1}{2}2x.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.\vec{e}_x + \frac{1}{2}2y.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.\vec{e}_y + \frac{1}{2}2z.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(r) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\left(x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(r) = \vec{\nabla}.r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(r)\right) = \frac{\partial(\partial r/\partial x)}{\partial x} + \frac{\partial(\partial r/\partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(\partial r/\partial z)}{\partial z}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(r)\right) = \Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - x^2.(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

De la même manière

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - y^2.(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - z^2.(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

En faisant la somme

$$div\left(\overrightarrow{grad}(r)\right) = 3.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + z^2).(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(r)\right) = 3.(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

Finalement

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{grad}(r)\right) = \Delta r = \frac{2}{r}}$$

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\overrightarrow{grad}(r^2) = \frac{\partial r^2}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial r^2}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial r^2}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(r) = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\vec{e}_z = 2x.\vec{e}_x + 2y.\vec{e}_y + 2z.\vec{e}_z$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(r) = \vec{\nabla}.r = 2\left(x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z\right) = 2\vec{r}}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(r^2)\right) = \frac{\partial(\partial r^2/\partial x)}{\partial x} + \frac{\partial(\partial r^2/\partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(\partial r^2/\partial z)}{\partial z}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(r^2)\right) = \Delta r^2 = \frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$

De la même manière

$$\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$$

$$\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2$$

En faisant la somme

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{grad}(r^2)\right) = \Delta r^2 = 6}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -(0-0) \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}}$$

EXERCICE 26 :

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \qquad \text{avec} \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(f) = -\frac{1}{2}2x.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.\vec{e}_x - \frac{1}{2}2y.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.\vec{e}_y - \frac{1}{2}2z.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(f) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\left(x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z\right)$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \frac{\partial(\partial f/\partial x)}{\partial x} + \frac{\partial(\partial f/\partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(\partial f/\partial z)}{\partial z}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2.(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

De la même manière

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y.(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3y^2.(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-z.(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3z^2.(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

En faisant la somme

$$div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = -3.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3(x^2+y^2+z^2).(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = -3.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

Finalement

$$div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = 0$$

EXERCICE 27 :

$$f(x,y,z) = xy - 3x^2z + 2yz \quad ; \quad \vec{A}(x,y,z) = (2x^2 - y^2z).\vec{e}_x + (y^3 - 2x^2z).\vec{e}_y + (x^2z^2).\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x^2 - y^2z & y^3 - 2x^2z & x^2z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2x^2 \\ -(2xz^2 + y^2) \\ -4xz + 2yz \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2 \\ -(2xz^2 + y^2) \\ 2yz - 4xz \end{pmatrix}$$

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \frac{\partial(2x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-2xz^2 - y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2yz - 4xz)}{\partial z}$$

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \vec{\nabla}\bullet(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 4x - 2y + 2y - 4x = 0}$$

$$\vec{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial(xy - 3x^2z + 2yz)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(xy - 3x^2z + 2yz)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(xy - 3x^2z + 2yz)}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f(x,y,z) = (y - 6xz + 0).\vec{e}_x + (x + 0 + 2z).\vec{e}_y + (0 - 3x^2 + 2y).\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y - 6xz & x + 2z & -3x^2 + 2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ -(-6x + 6x) \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}.f) = \vec{0}}$$