Université Ziane Achour Djelfa.	Séries d'exercices pour 1ère année.
Faculté des sciences exactes et informatique.	Année mathématique (LMD-S1).
Département : mathématiques et Informatiques	Module : Analyse 1.

Série N° 1
Les nombres réels

Exercise 1 *Démontrer que le carré d'un entier impair est impair.*

Exercise 2 (**Raisonnement par récurrence**)

Démontrer les relations suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)}{4}$.

Exercise 3 (**autour de** $\sqrt{2}$)

On considère l'équation $x^2 = 2$. Montrez que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercise 4 (**Calcul de racine**)

Montrer que les nombres suivantes sont rationnels

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \\ \text{et } b &= \sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}} \ . \end{aligned}$$

Exercise 5 (**autour des valeurs absolues**)

Démontrer les relations suivantes : $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1) $|x+y| \leq |x| + |y|$,

2) $||x| - |y|| \leq |x+y|$,

3) $|xy| = |x|\,|y|$.

Exercise 6 (**inf**, **sup**, **max**, **min**)

Soit $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\} = \left\{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, ...\right\}$

- Montrez que A est un ensemble non vide, majoré et minoré.
- Montrez que $sup(A) = max(A) = 1$.
- Montrez que $inf(A) = 0$.
- Montrez que $min(A)$ n'existe pas.

Exercise 7 (**inf**, **sup**, **max**, **min**)

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément s'ils existent :

$$\begin{aligned} A &= \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \\ B &= \mathbb{N}, \\ C &= [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ D &=]0,1[\cap \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Exercise 8 *Soient Aet B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note*

$$A + B = \{a + b \;/\; (a,b) \in A \times B\}.$$

- Montrer que $supA + supB$ est un majorant de $A + B$.
- Montrer que$sup(A+B) = supA + supB$.

Exercise 9 (**autour des parties entières**)

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Démontrer les résultats suivants

$$\begin{aligned} E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) &= E(x), \\ x - 1 &< E(x) \leq x \end{aligned}$$

soit x$\in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$E(x+n) = E(x) + n$$