Série N° 2

Les suites numériques

Exercise 1 *Etudier la* ***monotonie*** *des suites suivantes et en déduire eventuellement leur nature:*

1) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$; **2)** $u_n = \sqrt{\frac{n^3-1}{n^4}}$;

3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; **4)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$;

5) $u_n = \frac{1^2 + 2^2 + \ . \ . \ . \ + n^2}{n^2}$; **6)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $p = 2, 3, \ldots$;

7) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$; **8)** $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$;

9) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; **10)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$;

11) $u_n = \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$; **12)** $u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$.

Exercise 2 *En utilisant le théorème des trois suites, calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *si :*

1) $u_n = \frac{n(\cos n + \sin n)}{(n+1)^2}$; **2)** $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

3) $u_n = (n+1)^k - n^k \quad (0 < k < 1)$; **4)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;

5) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$; **6)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$;

Exercise 3 *On considère les deux suites :*

$$\boldsymbol{u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},}$$

$$\boldsymbol{v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.}$$

Montrer que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de* $\mathbb{R} \diagup \mathbb{Q}$.

Exercise 4 *Soit* $a > 0$. *On définit la suite par* $(u_n)_{n\geq 0}$ *par* u_0 *un réel vérifiant* $u_0 > 0$ *et par la relation*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) *tend vers* $\sqrt{a}$.

- Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{\left(u_n^2 - a\right)^2}{4u_n^2},$$

- Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$est décroissante.
- En déduire que la suite(u_n) **converge** vers$\sqrt{a}$.

Exercise 5 *En appliquant le **critère de Cauchy** étudier la nature des suites suivantes définies par:*

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ka}{k^\alpha}$ $(a \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 2)$; (indication: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$);

2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k$ $(|\lambda| < 1,\ |a_k| \leq M\ (k \in \mathbb{N}))$;

3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$; **4)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \geq 2,\ \alpha \in \mathbb{N})$; **5)** $u_n = \cos \frac{1}{n}$;

6) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; **7)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; **8)** $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log k}$;

9) $u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Exercise 6 *Soit la suite numérique (u_n) définie par:*

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1 = 1, \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + u_{n-1}} \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

- Calculer u_2, u_3.Montrer que la suite (u_n) est monotone.
- Montrer que la suite(u_n) est **majorée**.
- Est-elle **convergente**? Si oui, calculer sa limite.

Exercise 7 *Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!},$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2},\ n \geq 2;$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}},\ p \geq 2,\ n \geq 2.$$

- Montrer que(u_n) et (v_n) sont **adjacentes**.