UNIVERSITE ZIANE ACHOUR DE DJELFA- **Année 2020-2021**

Tronc-commun Mathématiques et Informatique

« Corps des nombres réels »

Exercice 1.

1- Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2- En déduire que les nombres $x = 2 - 3\sqrt{2}$ et $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ sont irrationnels.
3- Montrer que le réel suivant est irrationnel :$\sqrt{x} + \sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
4- Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $rx \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Montrer que pour tout x et tout y appartenant à IR, on a :

i) Pour tout n dans IN : $[x+n] = [x] + n$
ii) $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

Exercice3. Donner (s'ils existent), les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants: $E_1 =]0,1[\cap Q$, $E_2 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $E_3 = \left\{-\frac{1}{x},\ 1 \leq x \leq 2\right\}$.

Exercice 4.

1- Montrer que les ensembles: $A = \left\{\frac{n-1}{n}, n \in IN^*\right\}$ et $B = \left\{\frac{2n+1}{n}, n \in IN^*\right\}$ sont bornés.

2- En utilisant la caractérisation des bornes sup et inf, déterminer : sup$A$, sup$B$, inf$A$ et inf$B$.

Exercice 5. Soit A une partie non vide, bornée de IR et $B \subset A$.

1- Montrer que B est bornée.
2- Montrer que : inf$A \leq$ inf$B \leq$ sup$B \leq$ sup$A$

Exercice 6. Soient A et B deux parties non vides et bornées de IR et $x \in IR$ on note :

$\boldsymbol{-A} = \{-a; a \in A\}$, $\boldsymbol{A+B} = \{a+b; a \in A \text{ et } b \in B\}$, $\boldsymbol{x+A} = \{x+a; a \in A\}$,

$\boldsymbol{AB} = \{ab; a \in A \text{ et } b \in B\}$

1- Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

2- Montrer que: $\sup(A + B) = supA + supB$

3- Montrer que $\sup(x + A) = x + supA$

4- A-t-on toujours $\sup(AB) = supA.supB$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Série d'exercices supplémentaires (Les nombres réels)

Exercice1. **I-**Soit $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que :

1- $|x+y|\leq|x|+|y|$

2- $|x+y|\geq||x|-|y||$

3- $|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|$

II- Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$$

Exercice2. **1-** Donner (s'ils existent), les majorants, les minorants, la borne sup, la borne inf, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles :$E_1 = [0,1] \cap Q$ $E_2 = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n};\ n, m \in \mathbb{N}^*\right\}, E_3 = \{\alpha x + 3; x \in]1,2], \alpha \in \mathbb{R}^*\}$

2-Soit la partie $A = \left\{x_n = \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer supA et infA (justifier)

Exercice3.Soit$f: [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On note$E = \{x \in [0,1]; f(x) \geq x\}$.

1- Montrer que E admet une borne supérieure b.
2- Prouver que $f(b) = b$.

Exercice 4.Montrer que l'ensemble des entiers naturels n'a pas de borne supérieure.

Exercice5. **1-** Montrer que toute intersection d'intervalles est un intervalle.

2- Est-ce-que la réunion de deux intervalles est un intervalle ? donner un contre exemple.

(Les suites numériques)

Exercice 1.

En utilisant la définition de la convergence, montrer que les suites définies par : $U_n = \frac{1-2n}{n+1}$, $n \in IN$, $U_n = \frac{(-1)^n}{n} n \in IN^*$ convergent respectivement vers (-2) et 0.

Exercice 2. Etudier la convergence des suites suivantes :

$$U_n = \frac{7^{n+1} + 6^{n+1}}{7^n + 6^n} \quad , \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \qquad , U_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n}$$

$$T_n = \frac{(-1)^n \sin(n^p + r)}{(n^p + r)}, p \in IN^* \; et \; r \in IR^+$$

Exercice 3. Etudier la monotonie puis la convergence des suites :

$$U_n = 4 - \frac{3}{n} \quad , \qquad U_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2(n+1)}$$

Exercice4. Soit la suite définie par : $U_0 \in [0,1]$, $U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2+U_n}$, n$\in IN$

1- Montrer que pour tout n entier naturel, $U_n \in [0,1]$
2- Montrer que la suite (U_n) est monotone et déterminer la valeur de U_0 pour que la suite (U_n) soit croissante (décroissante resp).
3- Montrer que la suite (U_n) est convergente, est ce que sa limite dépend de U_0 ?

Exercice5. Soit a et b deux réels tels que : $b > a > 0$. et soit (U_n) et (V_n)deux suites définies par :$U_0 = a, \;\; V_0 = b, U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} et V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

Montrer qu'elles sont adjacentes.