Chapitre III

CONVOLUTION ET CORRELATION

III.1. Introduction :

La convolution et la corrélation sont des concepts physiques significatifs dans plusieurs domaines scientifiques.
Elles jouent un rôle important dans l'analyse et le traitement des signaux.

III.2. Convolution :

III.2.1. Définition :

Le produit de convolution entre deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est défini de la façon suivante :

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau).g(t-\tau)\,d\tau \qquad \text{(III.1)}$$

Le produit de convolution exprime la quantité de recouvrement d'une fonction f lorsqu'on la déplace sur une autre fonction g : c'est un *mélangeur* de fonction. C'est un outil important en TDS (traitement des signaux).

De même le signal de sortie $y(t)$ d'un système linéaire causal est donné par le produit de convolution du signal d'entré $x(t)$ par la réponse impulsionnelle du système $h(t)$.

Dans le cas discret :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow \begin{aligned} y(n) &= x(n) \otimes h(n) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k) \end{aligned}$$

III.2.2. Représentation graphique du produit de convolution :

En examinant le produit de convolution suivant :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \qquad \text{(III.2)}$$

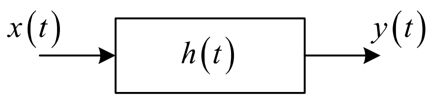
On peut énumérer les différentes étapes et opérations intervenant dans le produit de convolution :

1. La variable t est remplacé par τ .
2. On prend la symétrie de $h(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnes $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$

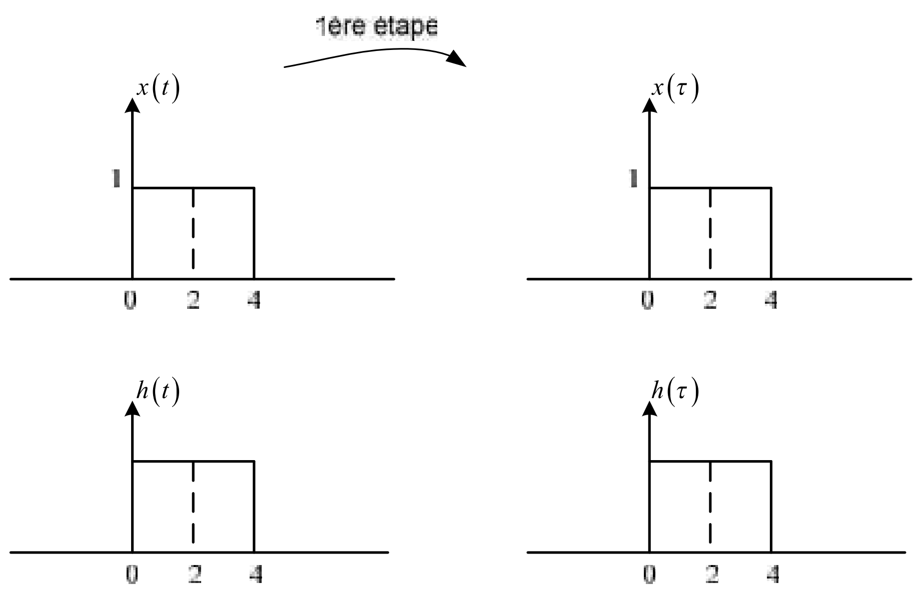
3. Cette fonction $h(-\tau)$ est ensuite translatée vers la droite d'une quantité t $h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$
4. On fait le produit $x(\tau)$ par $h(t-\tau)$
5. Le produit de convolution est une fonction du temps t, est doit être évalué pour $-\infty < t < +\infty$.

Exemple :

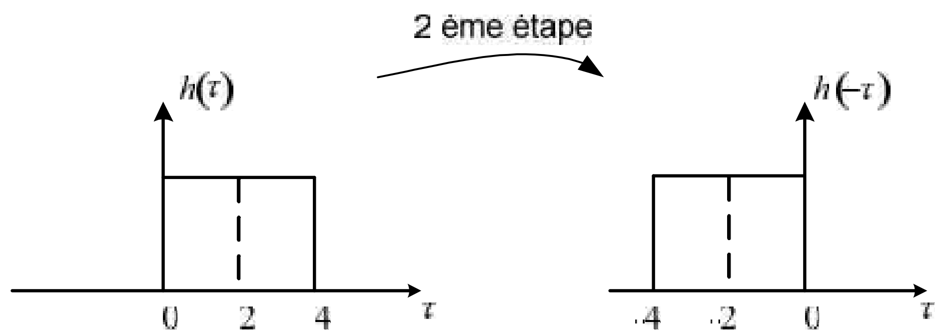
Soit $x(t) = h(t) = rect\left(\frac{t-2}{4}\right)$



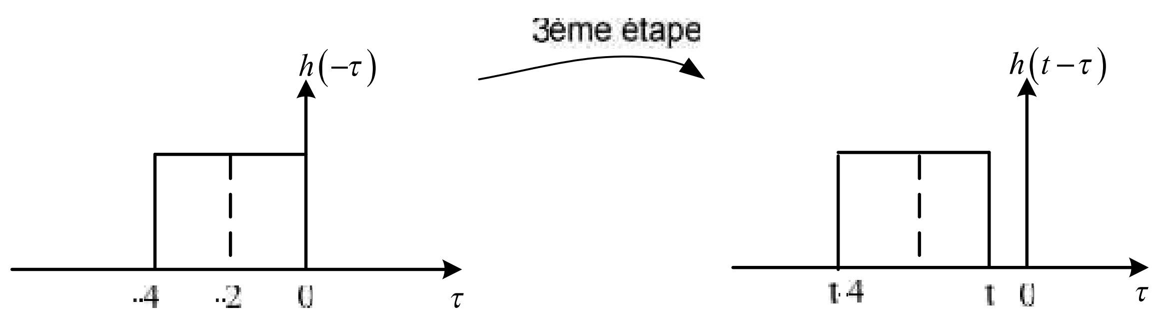
Calculer $y(t)$



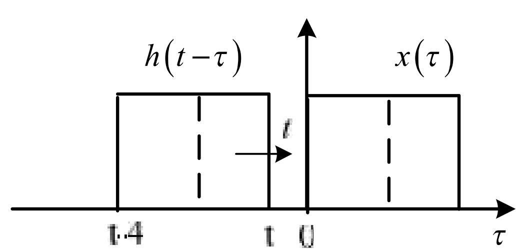
2ème étape



3ème étape



4ème et 5ème étape



1 er cas :

$t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$ (il n'y a aucune section entre les deux).

2ème cas :

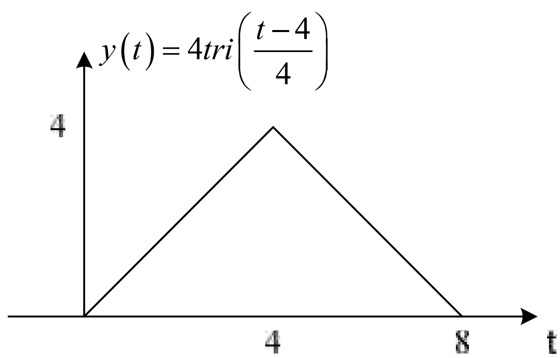
$$0 \le t \le 4 \Rightarrow y(t) = \int_0^t 1.d\tau = t$$

3ème cas :

$$t > 4 \Rightarrow y(t) = \int_{t-4}^{4} 1.d\tau = 8 - t$$

$$t - 4 > 4 \Rightarrow t > 8 \Rightarrow y(t) = 0$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t \le 4 \\ 8-t & 4 \le t \le 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases}$$



$$rect\left(\frac{t-2}{4}\right) \otimes rect\left(\frac{t-2}{4}\right) = 4tri\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

III.3. Propriétés :

III.3.1. Commutativité :

Le produit de convolution est commutatif

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t) \qquad \text{(III.3)}$$

$$x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{(III.4)}$$

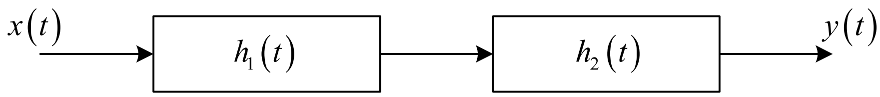
Si on pose :

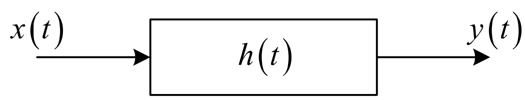
$$t-\tau = M \rightarrow \begin{cases} d\tau = -dM \\ \tau \rightarrow +\infty, M \rightarrow -\infty \\ \tau \rightarrow -\infty \rightarrow, M \rightarrow +\infty \end{cases} \qquad \text{(III.5)}$$

L'équation (III.4) devient :

$$\begin{aligned} &\int_{+\infty}^{-\infty} x(t-M).h(M)(-dM) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-M).h(M)(dM) \\ &= h(t)\otimes x(t) \end{aligned} \qquad \text{(III.6)}$$

III.3.2. Associativité :





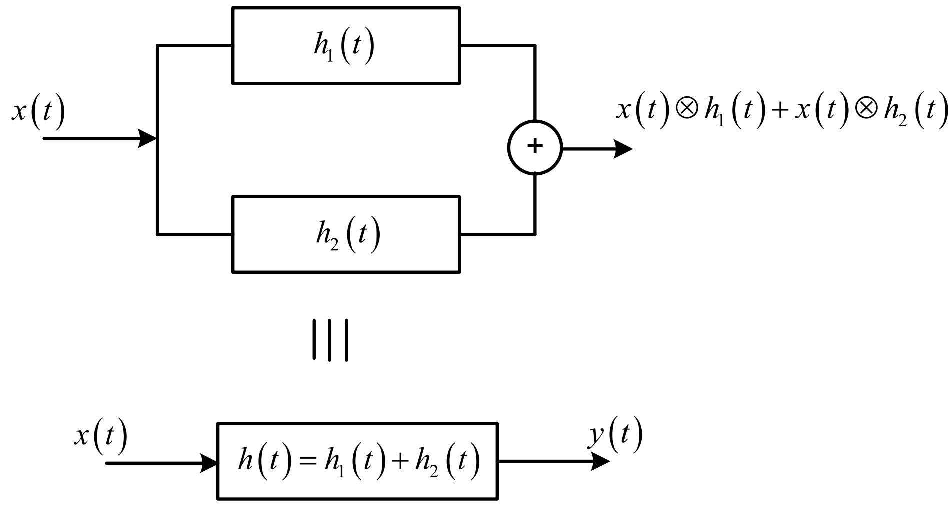
$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\otimes h(t) \\ &= x(t)\otimes\left[h_1(t)\otimes h_2(t)\right] \\ &= \left[x(t)\otimes h_1(t)\right]\otimes h_2(t) \end{aligned} \qquad \text{(III.7)}$$

III.3.3. Distributivité :

Cette propriété est la conséquence de la linéarité des intégrales.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\otimes h_1(t) + x(t)\otimes h_2(t) \\ &= x(t)\otimes\left[h_1(t)+h_2(t)\right] \end{aligned} \qquad \text{(III.8)}$$

Grâce à cette propriété, on peut dire que la mise en parallèle de deux systèmes de réponse impulsionnelle $h_1(t)$ et $h_2(t)$ est équivalente à un système dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est la somme des deux réponses $h_1(t)$ et $h_2(t)$.



III4. Corrélation :

III.4.1. Principe de la corrélation :

En traitement de signaux, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux, cela peut se faire de plusieurs manières.

La méthode qui est la plus utilisée consiste à une mesure de leur similitude de forme et de position en faisant translater l'un des signaux par rapport à l'autre mathématiquement. Cette opération est un produit scalaire.

III.4.2. Définition de la corrélation :

C'est la relation réciproque qui indique le degré de similitude entre deux fonctions (signaux).

a) Fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux énergétiques :

On appelle fonction d'inter corrélation notée $R_{xy}(\tau)$ en anglais (cross corrélation), la fonction permettant la mesure de la similitude entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$.

$$R_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).y(t+\tau)\,dt \qquad \text{(III.9)}$$

Avec $x^*(t)$ le conjugué de $x(t)$.

$y_\tau \to y(t)$ est translaté d'une quantité τ .

Cas discret :

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n).y(n+k) \tag{III.10}$$

Cas particulier :

Si nous somme dans les signaux réels

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t+\tau)\,dt \tag{III.11}$$

b) Fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux énergétiques :

Cette opération permet de comparer un signal $x(t)$ avec lui-même durant l'intervalle de temps t dont l'un des signaux est décalé (translaté) d'une certaine quantité $\tau \quad \Rightarrow y(t) = x(t)$.

$$R_x(\tau) = \langle x^*, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).x(t+\tau)\,dt \tag{III.12}$$

Cas discret :

$$R_x(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^*(n).x(n+k) \tag{III.13}$$

c) Relation entre énergie et fonction d'autocréation :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,x(t)\,dt = R_x(0) \tag{III.14}$$

La valeur à l'origine d'une fonction d'auto-corrélation représente l'énergie du signal :

$$\boxed{E_x = R_x(0)} \tag{III.15}$$

d) Fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\,y(t+\tau)\,dt \tag{III.16}$$

e) Fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt \qquad \text{(III.17)}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, x(t)\, dt = R_x(0) \qquad \text{(III.18)}$$

III.5. Relation entre la corrélation et la convolution :

$$\begin{cases} z(\tau) = x(\tau) \otimes y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(\tau - t)\, dt \\ R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t).y(t+\tau)\, dt \end{cases} \qquad \text{(III.19)}$$

Si on pose $M = -t$

$$\begin{cases} t \to +\infty \Rightarrow M = -\infty \\ t \to -\infty \Rightarrow M = +\infty \\ dt = -dM \end{cases}$$

L'équation (III.20) devient :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-M)\, y(\tau - M)\, dM \\ &= x^*(-\tau) \otimes y(\tau) \end{aligned} \qquad \text{(III.20)}$$

Dans le cas des signaux réels : $R_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau)$

La différence entre la fonction d'inter-corrélation $R_{xy}(\tau)$ et la convolution des deux fonctions se trouve au niveau de la fonction qui est inversé par rapport au temps. Dans le cas des fonctions réelles et paires, la convolution et la corrélation sont équivalent.

Si $x(\tau)$ réel et paire alors : $R_{xy}(\tau) = x(\tau) \otimes y(\tau)$.

III.6. Propriétés :

a) La symétrie :

Si les signaux sont complexes :

$$R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau) \tag{III.21}$$

Dans le cas où les signaux sont réels :

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \tag{III.22}$$

Remarque : pour une fonction d'autocorrélation, on peut dire que pour un signal réel :

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{III.23}$$

Cela veut dire que la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ est une fonction réelle paire.

b) La périodicité :

Si un signal $x(t)$ est périodique d'une période T alors $R_x(\tau)$ est aussi périodique de la même période.

$$x(t) = x(t+kT) \rightarrow R_x(\tau) = R_x(\tau + kT) \tag{III.24}$$

c) Additivité :

$$\begin{gathered} z(t) = x(t) + y(t) \rightarrow R_z(\tau) \\ R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) \end{gathered} \tag{III.25}$$

Cas particulier :

Si $x(t)$et $y(t)$ sont indépendants (il n'y'a aucune ressemblance entre les deux)

$$\begin{gathered} \Rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0 \\ \Rightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \end{gathered} \tag{III.26}$$