Chapitre V

TRANSFORMEE DE LAPLACE

V.1. Introduction :

La transformée de Laplace est une technique très utilisée dans la résolution des problèmes d'engineering comme pour la transformée de Fourier. Cette transformation permet d'associer, à toute fonction f(t), une fonction F(p) d'une variable complexe $P = \sigma + j\omega$. Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

V.2. Définition de la transformée de Laplace :

Pour remédier à l'inexistence de la TF de certaines fonctions, l'idée pour rendre l'intégrale convergente, c'est de multiplier la fonction $x(t)$ par une fonction correctrice $\exp(-\sigma t)$ avec comme condition l'existence d'une valeur réel σ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t).e^{-\sigma t} \right| dt < \infty \tag{V.1}$$

σ : est appelé abscisse de convergence c'est une grandeur réelle et positive.

$$\begin{aligned} TL\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t}.e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j2\pi f)t} dt \end{aligned} \tag{V.2}$$

Si on pose $p = \sigma + j2\pi f$

$$\boxed{TL\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = X(p)} \tag{V.3}$$

La variable p est appelé fréquence complexe et des fois elle est notée s

Remarque importante :

Cette équation représente la transformée de Laplace bilatérale (intégration de $-\infty$ à $+\infty$)

Ce que nous appelons mono latérale c'est $X(p) = \int_{0}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$

La TL trouve sont intérêt dans l'étude des régimes transitoires des signaux physiquement réalisables qui justement sont nuls pour $t < 0$.

La TL est un outil très utilisé par les physiciens et les mécaniciens.

Exemple 1

Calculer la TL de l'échelon unité : $x(t)=u(t)=\begin{cases}0 \ pour & t<0\\ 1 \ pour & t\geq 0\end{cases}$

$$TL\{u(t)\}=\int_0^{+\infty} 1e^{-pt}dt=\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{p}$$

$$\boxed{U(p)=\frac{1}{p}}$$

Exemple 2

Soit à calculer $TL\{f'(t)\}$ connaissant $TL(f(t))$.

On a $TL\{f(t)\}=F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$u=f(t)$ $\qquad$ $dv=e^{-pt}dt$

$du=f'(t)dt$ $\qquad$ $v=\dfrac{e^{-pt}}{-p}$ $\qquad$ Or : $(uv)'=u'v+uv'\Rightarrow \int uv'=uv-\int u'v$

$$\Rightarrow F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt=\left[f(t)\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f'(t)dt$$

$$\Rightarrow F(p)=\frac{f(0)}{p}+\frac{1}{p}TL\{f'(t)\}$$

$$TL\{f'(t)\}=pF(p)-f(0)$$

Si la condition initiale est nulle $(f(0)=0)$, alors :

$$TL\{f'(t)\}=pF(p)$$

De même, si toutes les conditions initiales sont nulles $(f(0)=f'(0)=f''(0)=....=0)$, alors :

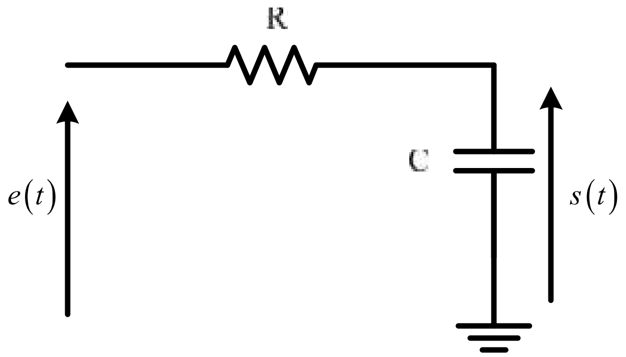
$$TL\{f^n(t)\}=p^nF(p)$$

Dans ce cas là, l'équation différentielle (pour un système linéaire) liant l'entrée $e(t)$ à la sortie $s(t)$ est :

$a_n\dfrac{d^n}{dt^n}s(t)+...+a_1\dfrac{d}{dt}s(t)+a_0s(t)=b_k\dfrac{d^k}{dt^k}e(t)+...+b_1\dfrac{d}{dt}e(t)+b_0e(t)$ s'écrit, en utilisant la transformée de Laplace :

$$a_np^nS(p)+...+a_1pS(p)+a_0S(p)=b_kp^kE(p)+...+b_1pE(p)+b_0E(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{b_k p^k + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_0} E(p) \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{l} S(p) = TL\{s(t)\} \\ E(p) = TL\{e(t)\} \end{array}$$



$$S(p) = \frac{1/jC\omega}{\frac{1}{jC\omega} + R} E(p)$$

V.3. Domaine de convergence (Dp) :

Si la valeur complexe p appartient au domaine de convergence Dp, cela indique que $X(p)$ existe.

Si $p \in Dp \Rightarrow X(p)$ existe

Définition :

1) On dit que l'intervalle de Laplace converge si :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left| x(t) e^{-pt} \right| dt = \int_0^{+\infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma t} dt < \infty} \tag{V.4}$$

Si $t \to \infty, \left| x(t) \right| e^{-\sigma t} \to 0$, l'intégrale de Laplace est convergente (ce si est vrais sous certaine condition de $x(t)$)

2) Fonction d'ordre exponentiel :

On dit que $x(t)$ est d'ordre exponentiel s'il existe un nombre réel σ_0 et un nombre positif finie M tel que :

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \left| x(t) \right| e^{-\sigma_0 t} < M} \tag{V.5}$$

Toute fonction bornée est une fonction d'ordre exponentiel (tous les signaux physiques sont d'ordre exp).

V.4. Propriétés usuelles de la transformée de Laplace

a) Linéarité :

Si a et b sont constants, on a :

$$\left.\begin{array}{l} TL\{f(t)\}=F(p) \\ TL\{g(t)\}=G(p) \end{array}\right\} \quad TL\{af(t)+bg(t)\}=aF(p)+bG(p)$$

Car : $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\{af(t)+bg(t)\}dt = a\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt + b\int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t)dt$

En particulier :

$$\boxed{\begin{array}{l} TL\{f(t)+jg(t)\}=TL\{f(t)\}+j.TL\{g(t)\} \\ et \quad TL\{Kf(t)\}=K.TL\{f(t)\} \end{array}} \qquad \text{(V.6)}$$

b) Dérivation :

Voir l'exemple 2, ci-dessus

$$TL\{f'(t)\}=pF(p)-f(0)$$

$f(0)$, représente la valeur de $f(t)$ lorsque $t \to 0$ par valeur positive puisque $f(t)$ n'est pas définie pour $t<0$.

D'une manière générale, on peut écrire :

$$TL\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} f^{(r-n-1)}(0)$$

Avec : $f^{(r-n-1)}(0) = \left.\frac{d^{(r-n-1)} f(t)}{dt^{(r-n-1)}}\right|_{t=0}$

Exemple :

$$TL\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$TL\left\{\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right\} = p^3 F(p) - p^2 F(0) - pf'(0) - f''(0)$$

c) Intégration :

Soit à calculer $TL\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = TL\left\{P(t)\right\}, P(t)$ désignant une primitive de $f(t)$ pour t > 0.

On a : $TL\left\{P(t)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} P(t)\,dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$u = P(t) \qquad dv = e^{-pt}dt$

$du = P'(t)\,dt \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p}dt \qquad (uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

$$\Rightarrow TL\left\{p(t)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} p(t)\,dt = \left[p(t)\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt} p'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow TL\left\{p(t)\right\} = \frac{p(0)}{p} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow TL\left\{p(t)\right\} = \frac{1}{p} TL\left\{f(t)\right\} + \frac{p(0)}{p}$$

En général :

$$TL\left\{\int_0^t\int_0^t \ldots \int_0^t f(t)\,dt^n\right\} = \frac{1}{p^n} TL\left\{f(t)\right\} \tag{V.7}$$

En supposant nulles toutes les primitives de f(t) quand $t \to 0$ par valeurs positives.

d) Changement d'échelle :

Un changement de l'échelle des temps se traduit par le changement de la variable " $t = kt \text{ ou } t = k/t$ ".

On a :

$TL\left\{f(kt)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} k(kt)\,dt$

Posant : $kt = u \Rightarrow du = kdt \Rightarrow dt = \frac{du}{k}$

Donc :

$TL\left\{f(kt)\right\} = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-p\frac{u}{k}} f(u)\,du = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$

$$f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$$
$$f(at) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|a|} F\left(p/a\right)$$
$$f\left(\frac{1}{a}t\right) \xrightarrow{TL} aF(ap)$$

e) Translation temporelle :

$$f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$$
$$f(t-T) \xrightarrow{TL} F(p)e^{-pT}$$

f) Translation fréquentielle (complexe) :

$$F(p) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)$$
$$F(p+a) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)e^{-at}$$

V.5. Tableau des transformées de Laplace :

$f(t)$ (causal)	$F(p)$	Dp
$\delta(t)$	1	$]-\infty, +\infty[$
$U(t)$	$1/p$	$]0, +\infty[$
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$]-\mathrm{Re}(a), +\infty[$
$tU(t)$	$1/p^2$	$]0, +\infty[$
$t^n U(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$]0, +\infty[$
$\sin(\omega_0 t).U(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$]0, +\infty[$
$\sin(\omega_0 t).e^{-at}U(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$]-\mathrm{Re}(a), +\infty[$
$\cos(\omega_0 t).U(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$]0, +\infty[$
$\cos(\omega_0 t).e^{-at}U(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$]-\mathrm{Re}(a), +\infty[$

V.6. Transformée inverse de Laplace :

Dans le cas d'un problème de système mécanique ou électrique, on se trouve généralement en présence d'un système d'équations différentielles le plus souvent linéaire à coefficient constant portant sur les fonctions réelles du temps.

Les entrées $e(t)$ représentent les actions par exemple différence de potentiel, courant, force…agissants sur le système.

Les sorties $y(t)$ sont des fonctions mesurées résultantes de la présence des entrées et de la constitution du système.

Grâce à la TL, on passe d'un problème portant sur le domaine temporelle à un problème portant sur le domaine de la variable complexe *p*, après avoir obtenu la solution du problème. Il est nécessaire d'inverser cette transformation pour obtenir la solution ayant pour domaine de temps. C'est la transformée de Laplace inverse. On la note TL^{-1} ou L^{-1}. Toute la complication est de déterminer la TL^{-1}.

Si $F(p)$ est la Transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, on a :

$$f(t) = TL^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{j2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad (t \geq 0)$$

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, $F(p)$ est immédiatement reconnaissable dans la table,
- soit, lorsque la fonction $F(p)$ n'apparait pas dans la table, décomposer $F(p)$ en fractions partielles et écrire $F(p)$ en termes de fonctions simples de *p* pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Soit $F(p) = TL\{f(t)\}$

Si $F(p)$ peut être décomposée en termes distincts : $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \ldots + F_n(p)$ et Si les transformées inverses sont disponibles,

Alors :

$$\begin{aligned} TL^{-1}\{F(p)\} &= TL^{-1}\{F_1(p)\} + TL^{-1}\{F_2(p)\} + \ldots + TL^{-1}\{F_n(p)\} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t) \end{aligned}$$

V.6.1. Détermination de la TL^{-1} par décomposition en éléments simples :

Cette technique est très utilisée par les physiciens, car elle permet d'utiliser la table de transformation.

$$S(p)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} \quad \begin{cases} n \geq m \\ a_n = 1 \end{cases}$$

Cette technique est basée sur trois étapes essentielles :

a) 1$^{\text{ère}}$ étape calcule les racines du polynôme $X(p)$

Résoudre l'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i p^i = 0$ pour déterminer les racines

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i = \prod_{i=1}^{L} (p-r_i)^{n_i}}$$

r_i : sont les racines du polynôme

n_i : c'est le nombre de racine égale a r_i (racine simple, double)

L : c'est le nombre totale des racines.

$$\boxed{S(p)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\prod_{i=1}^{L} (p-r_i)^{n_i}}}$$

b) 2$^{\text{eme}}$ étape : les tables de décomposition :

Cas des racines simples :

$$S(p)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\prod_{i=1}^{L} (p-r_i)^{n_i}} \quad n \geq m$$

$$= b_n + \frac{A_{11}}{(p-r_1)} + \frac{A_{21}}{(p-r_2)} + \frac{A_{31}}{(p-r_3)} + \ldots + \frac{A_{Li}}{(p-r_L)}$$

A_{Li} : sont les inconnues à trouver.

Remarque :

Dans le cas où le degré de $B(p) >$ degré de $A(p)$ dont $F(p) = \dfrac{B(p)}{A(p)}$, il faut alors diviser le numérateur par dénominateur, ensuite appliquer la méthode des fractions partielles.

Exemple :

Trouver la Transformée Inverse de $F(p) = \dfrac{p+3}{(p+1)(p+2)}$ 2 pôles distincts : $p=-1,\ p=-2$

Cas des racines doubles :

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\prod_{i=1}^{L} (p-r_i)^{n_i}} \quad n \geq m \quad \text{On suppose que la deuxième racine est double}$$

$$= b_n + \frac{A_{11}}{(p-r_1)} + \frac{A_{21}}{(p-r_2)} + \frac{A_{22}}{(p-r_2)^2} + \frac{A_{31}}{(p-r_3)} + \ldots + \frac{A_{Li}}{(p-r_L)}$$

c) 3^eme^ étape : calcule de TL^{-1} :

Grâce à la table de transformation.

Pour terminer nous dirons que toute la difficulté réside dans la première étape surtout comme l'ordre de l'équation est supérieur à 4, pour cela plusieurs méthodes de résolution dite numériques peuvent être envisagées :

Exemple :

$$S(p) = \frac{p^2+2p+2}{p^2+3p+2}$$

Trouver $s(t)$?

1er étape :

$$X(p) = p^2 + 3p + 2$$

$$X(p) = 0 \Rightarrow p^2 + 3p + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

2eme étape :

$$S(p) = b_n + \frac{A_{11}}{(p+1)} + \frac{A_{21}}{(p+2)} \qquad \begin{cases} A_{11} = ? \\ A_{21} = ? \end{cases}$$

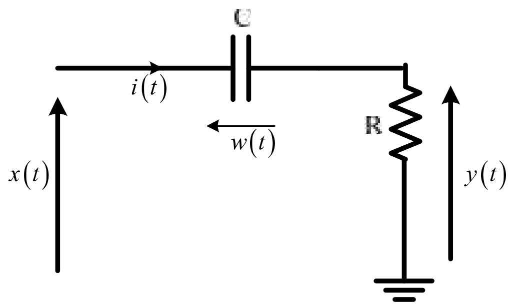
$$S(p)=\frac{b_n(p+1)(p+2)+A_{11}(p+2)+A_{21}(p+1)}{(p+1)(p+2)}=\frac{p^2+2p+2}{(p+1)(p+2)}$$

$A_{11}=1$

$A_{21}=-2$

$$S(p)=1+\frac{1}{p+1}-\frac{2}{p+2}\xrightarrow{TL^{-1}}s(t)=\delta(t)+e^{-t}-2e^{-2t}$$

Exemple d'un circuit électrique :



Etablir l'équation différentielle qui lie $y(t)$ à $x(t)$

Si $x(t)=2e^{-t}$, déterminer $y(t)$

$R=1M\Omega$, $C=1\mu F$, $V_{co}=1V$

$$\begin{cases} x(t)=y(t)+w(t) \\ y(t)=Ri(t) \end{cases}$$

$$w(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

$$\begin{cases} x(t)=y(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau+V_{co} \\ y(t)=Ri(t)\Rightarrow i(t)=\frac{y(t)}{R} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)}\xrightarrow{TL}pX(p)-x(0)=pY(p)-y(0)+\frac{1}{RC}Y(p)$$

$$x(t)=2e^{-t}\rightarrow X(p)=\frac{2}{1+p}$$

$$x(0)=\lim_{t\to 0}x(t)=2V$$

$$y(0) = \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{t \to 0} \left[x(t) - \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)\, d\tau - V_{co} \right]$$

$$= x(0) - V_{co} = 1V$$

$$Y(p) = \frac{2p}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}$$

$$= \frac{A_{11}}{p+1} + \frac{A_{12}}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \qquad \begin{cases} A_{11} = 2 \\ A_{12} = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = -2t\, e^{-t} + e^{-t}}$$

- La Table des principales transformées de Laplace et leurs propriétés est présentée dans l'Annexe A.