Chapitre VII

LA TRANSFORMEE EN Z

VII.1. Introduction :

La transformé en Z est utilisée pour simplifier les opérations des équations de différence.
Elle est utilisée comme un outil dans l'analyse et la conception des systèmes échantillonnés discrets, elle permet de simplifier la solution d'un problème de système discret par la conversion des équations de différence d'un système en équation algébriques et la convolution en une multiplication.

Elle joue le même rôle que la transformée de Laplace pour les systèmes continus.

VII.2. Définition 1:

Soit la séquence causale $\{x_0, x_1, x_2, ...x_n...\}$ sa transformée en Z est définit :

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + ...x_n z^{-n} + ...$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

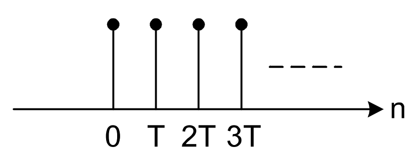
La variable z^{-1} est un opérateur de retard

T : temps d'échantillonnage

VII.3. Définition 2:

Soit le train d'impulsions représentant un signal discret :

$$x(t) = x_0\delta(t) + x_1\delta(t-T) + x_2\delta(t-2T) + ...x_n\delta(t-nT) + ...$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t-nT)$$



Sa transformée de Laplace :

$$X(s) = x_0 + x_1 e^{-sT} + x_2 e^{-2sT} + ...x_n e^{-nsT} + ...$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(e^{-sT}\right)^n$$

L'opération z est définit par :

$$z = e^{sT}$$

VII.4. La transformée en z des signaux discrets standards :

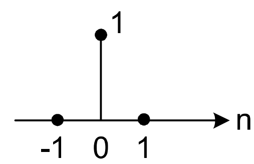
Les identités suivantes vont être utilisées pour définir les transformées en z des signaux discrets standards :

$$\sum_{n=0}^{k} a^n = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}\;; \quad a \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}\;; \quad |a| < 1$$

VII.4.1. Impulsion unitaire (Dirac) :

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



En utilisant la Définition 1

$$X(z) = 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \ldots = 1$$

$x(t) = \delta(t) \rightarrow$ transformée de Laplace $X(s) = 1$

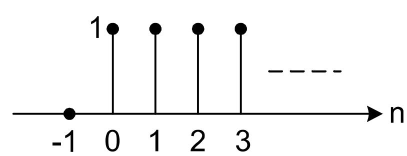
VII.4.2. Echelon échantillonné :

Soit la séquence : $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1,1,1,1,\ldots\}$

En utilisant la définition 1

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots + z^{-n} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$



En utilisant les identités déjà vu :

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z-1} \quad si \; |z| < 1$$

VII.4.3. Exponentiel :

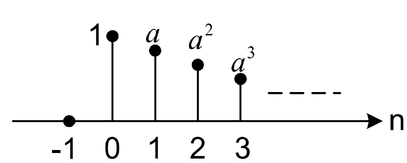
$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$x(n) = e^{-\alpha nT} = \left(e^{-\alpha T}\right)^n$$

$$x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0\,, n < 0 \end{cases} \quad avec \quad a = e^{-\alpha T}$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots + a^n z^{-n} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$



En utilisant les identités déjà établies :

$$U(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

VII.5. Propriétés de la transformée en Z :

VII.5.1. Linéarité :

$$Z\left\{\alpha f_1(n)+\beta f_2(n)\right\}=\alpha F_1(z)+\beta F_2(z)$$

Exemple :

Soit la séquence causale :

$$f(n)=2\times 1(n)+4\delta(n),\ \ n=0,1,2...$$

$$F(z)=Z\left\{2\times 1(n)+4\delta(n)\right\}=2Z\left\{1(n)\right\}+4Z\left\{\delta(n)\right\}$$
$$=\frac{2z}{z-1}+4=\frac{6z-4}{z-1}$$

VII.5.2. Retard temporel :

$$Z\left\{f(n-k)\right\}=z^{-k}F(z)$$
$$=z^{-k}\sum_{m=-k}^{\infty}f(m)z^{-m}=z^{-k}\left[f(-k)z^{k}+...+\sum_{m=0}^{\infty}f(m)z^{-m}\right]$$
$$=z^{-k}\left[f(-k)z^{k}+...+F(z)\right]$$

Dans le cas ou $f(-k)=...=0 \Rightarrow Z\left\{f(n-k)\right\}=z^{-k}F(z)$

Exemple 1:

$$f(n)=\begin{cases}4,\ n=2,3...\\0,\ n=0,1...\end{cases}$$

$$F(z)=Z\left\{4\times 1(n-2)\right\}=4z^{-2}Z\left\{1(n)\right\}$$
$$=z^{-2}\frac{4z}{z-1}=\frac{4}{z(z-1)}$$

Exemple 2:

$$Z\{y(n-2)\}=\sum_{n=0}^{\infty}y(n-2)z^{-n}$$

$$=z^{-2}\sum_{m=-2}^{\infty}y(m)z^{-m}$$

$$=z^{-2}\left[y(-2)z^{2}+y(-1)z^{1}+\sum_{m=0}^{\infty}y(m)z^{-m}\right]$$

Dans le cas ou $y(-2)=y(-1)=0 \Rightarrow Z\{y(n-2)\}=z^{-2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}y(m)z^{-m}\right]=z^{-2}Y(z)$

VII.5.3. Avance temporel :

$$Z\{f(n+1)\}=zF(z)-zf(0)$$

$$Z\{f(n+k)\}=z^{k}F(z)-z^{k}f(0)-z^{k-1}f(1)-...-zf(k-1)$$

$$Z\{f(n+1)\}=\sum_{n=0}^{\infty}f(n+1)z^{-n}$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}f(n+1)z^{-(n+1)}$$

On additionne et on soustrait la condition initiale $f(0)$

$$Z\{f(n+1)\}=z\left\{\left[f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}f(n+1)z^{-(n+1)}\right]-f(0)\right\}$$

On change l'indice de la sommation à $m=n+1$, et on réécrit la transformée en Z :

$$Z\{f(n+1)\}=z\left\{\left[\sum_{m=0}^{\infty}f(m)z^{-m}\right]-f(0)\right\}$$

$$=zF(z)-zf(0)$$

Exemple :

La séquence causale :

$$\{f(n)\}=\{4,8,16,...\}$$

La séquence peut être écrite :

$$\{f(n)\}=2^{n+2}=g(n+2),\quad n=0,1,2,....$$

Où $g(n)$ est une fonction exponentielle : $g(n)=2^{n}, n=0,1,2...$

En utilisant la propriété de l'avance temporelle :

$$F(z) = z^2 G(z) - z^2 g(0) - zg(1)$$

$$= z^2 \frac{z}{z-2} - z^2 - 2z = \frac{4z}{z-2}$$

VII.5.4. Multiplication avec un exponentiel :

$$Z\left\{a^{-n} f(n)\right\} = F(az)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(az)^{-n} = F(az)$$

Exemple :

Soit la séquence exponentielle :

$$g(n) = e^{-\alpha nT}, n = 0,1,2,...$$

La transformée en Z d'un échelon échantillonnée :

$$F(z) = \left(1 - z^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Et $g(n) = \left(e^{\alpha T}\right)^{-n} \times 1$

En appliquant la propriété de la multiplication par un exponentiel :

$$Z\left\{\left(e^{\alpha T}\right)^{-n} f(n)\right\} = \left[1 - \left(e^{\alpha T} z\right)^{-1}\right]^{-1} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

VII.5.5. Différence complexe :

$$Z\left\{n^m f(n)\right\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m F(z)$$

Exemple : Trouver la transformée en Z de la séquence d'une rampe échantillonné.

$$g(n) = n,\ n = 0,1,2,...$$

La transformée en Z d'un échelon échantillonné.

$$f(n) = 1 \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1}$$

Or $g(n) = n \times 1$

Si on applique la propriété de la différence complexe :

$$Z\{n\times 1\}=\left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)=-z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

VII.6. Transformée inverse en Z :

Pour revenir au domaine temporel, on utilise la transformée inverse en Z

VII.6.1. Décomposition en fraction :

Exemple :

$$F(z)=\frac{z+1}{z^2+0.3z+0.02}$$

En va prendre en premier $F(z)/z$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+1}{z\left(z^2+0.3z+0.02\right)}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+0.1}+\frac{C}{z+0.2}$$

$$A=z\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0}=F(0)=\frac{1}{0.02}=50$$

$$B=(z+0.1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=-0.1}=\frac{1-0.1}{(-0.1)(0.1)}=-90$$

$$C=(z+0.2)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=-0.2}=\frac{1-0.2}{(-0.2)(-0.1)}=40$$

Ainsi : $F(z)=\frac{50z}{z}-\frac{90z}{(z+0.1)}+\frac{40z}{z+0.2}$

En utilisant la table :

$$F(n)=\begin{cases}50\delta(n)-90(-0.1)^n+40(-0.2)^n & ;n\geq 0\\ 0 \quad ;n\leq 0\end{cases}$$

Il est à noter que $F(0)=50-90+40=0$

Donc on peut écrire : $F(n)=\begin{cases}-90(-0.1)^{n}+40(-0.2)^{n} & ;n\geq 1\\ 0 & ;n\leq 1\end{cases}$

VII.6.2. Cas des racines multiples :

Pour une fonction $F(z)$ avec des racines multiples

$$F(z)=\frac{N(z)}{(z-z_1)^{r}\prod_{j=r+1}^{n}(z-z_j)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{A_{1i}}{(z-z_1)^{r+1-i}}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{A_j}{(z-z_j)}$$

Les coefficients pour des racines multiples sont données par :

$$A_{1,i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}(z-z_1)^{r}F(z)\bigg|_{z\to z_1},i=1,2,...r$$

Exemple :

$$F(z)=\frac{1}{z^2(z-0.5)}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z^3(z-0.5)}=\frac{A_{11}}{z^3}+\frac{A_{12}}{z^2}+\frac{A_{13}}{z}+\frac{A_4}{z-0.5}$$

Où :

$$A_{11}=z^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{z-0.5}\bigg|_{z=0}=-2$$

$$A_{12}=\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}z^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0}=\frac{d}{dz}\frac{1}{z-0.5}\bigg|_{z=0}=\frac{-1}{(z-0.5)^2}\bigg|_{z=0}=-4$$

$$A_{13}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}z^3\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{-1}{(z-0.5)^2}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{2}\frac{(-1)(-2)}{(z-0.5)^3}\bigg|_{z=0}=-8$$

$$A_4=(z-0.5)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0.5}=\frac{1}{z^3}\bigg|_{z=0.5}=8$$

Ainsi : $F(z)=\dfrac{1}{z^2(z-0.5)}=\dfrac{8z}{z-0.5}-2z^{-2}-4z^{-1}-8$

$$f(n)=\begin{cases}8(0.5)^n-2\delta(n-2)-4\delta(n-1)-8\delta(n);\ n\geq 0\\ 0;\quad n<0\end{cases}$$

Evaluation de $f(n)$ pour $n=0,1,2,...$

$$f(0)=8-8=0$$
$$f(1)=8(0.5)-4=0$$
$$f(2)=8(0.5)^2-2=0$$

Donc on peut écrire :

$$f(n)=\begin{cases}(0.5)^{n-3};\quad n\geq 3\\ 0;\quad n<0\end{cases}$$

On peut utiliser le théorème de retard $Z\{g(n-k)\}=z^{-k}g(z)$, en écrivant :

$$F(z)=\frac{z}{z-0.5}z^{-3}$$

VII.7. La convolution et la transformée en Z :

$$y[n]=x[n]\otimes h[n]=\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]$$

$$\begin{aligned}Y[z]&=\sum_{k=0}^{M}h[k]\left(z^{-k}X(z)\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{M}h[k]z^{-k}\right)X(z)=H(z)X(z)\end{aligned}$$

$$\boxed{y[n]=x[n]\otimes h[n]\xrightarrow{Z}Y(z)=H(z)X(z)}$$

Exemple :

Soit :

$$x[n]=2\delta[n]-3\delta[n-2]+4\delta[n-3]$$
$$h[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

Calculer $y[n] = x[n] \otimes h[n]$

La transformée en Z de $x[n]$ et $h[n]$

$$X(z) = 2 - 3z^{-2} + 4z^{-3}$$
$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

On calcule $Y(z)$ par une multiplication directe :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left(2 - 3z^{-2} + 4z^{-3}\right)\left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right) \\ &= 2 + 4z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} \end{aligned}$$

On peut maintenant déduire $y[n]$ facilement :

$$\begin{aligned} y[n] = {} & 2\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2] \\ & - 2\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + 4\delta[n-5] \end{aligned}$$

La **multiplication** polynomiale peut être utilisée pour remplacer la **convolution** de séquence, lorsque nous travaillons dans le domaine Z.

- Le tableau de la transformée en Z et le tableau des opérations sur les transformées en Z, sont présentés dans l'annexe B.