CHAPITRE II: HYDROSTATIQUE

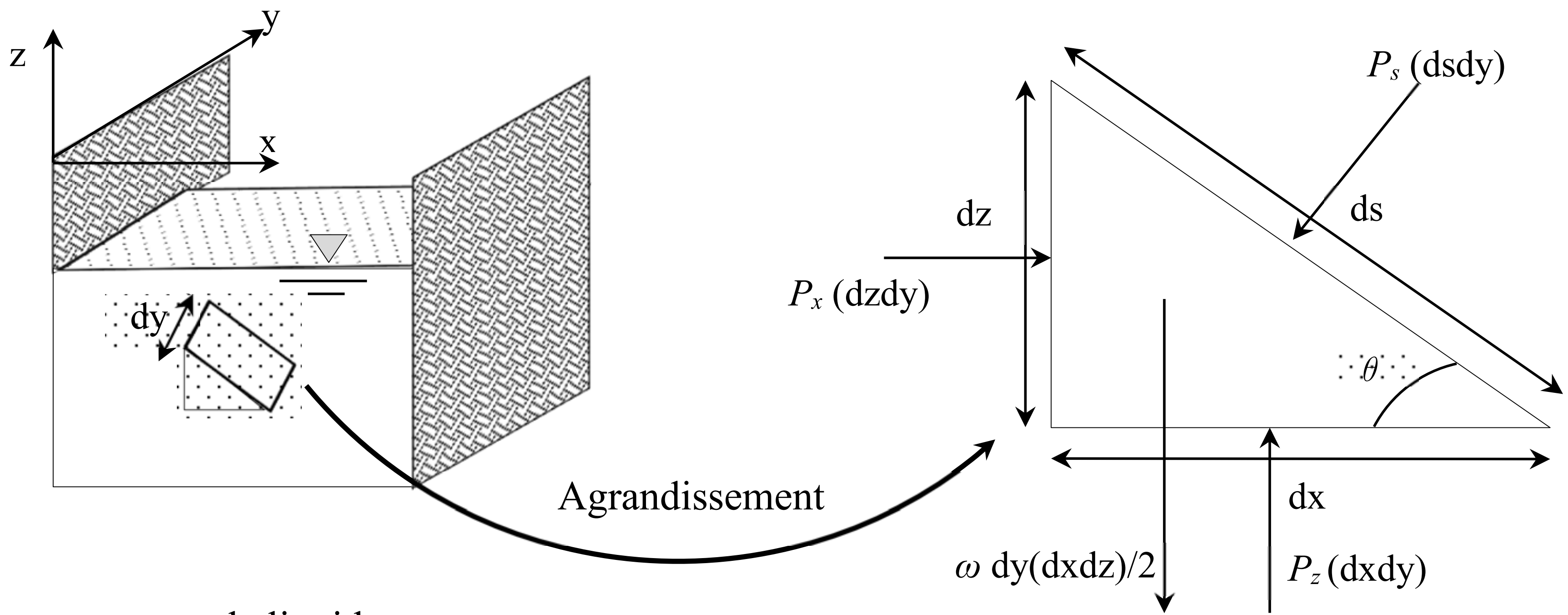
Introduction :

L'hydrostatique (la statique des fluides) est une branche qui s'occupe des fluides au repos et son interaction avec les surfaces et les corps immergés. Les forces d'inerties sont nulles car les particules fluides ne bougent pas, et les forces de frottement qui sont essentiellement dues à la viscosité ne manifestent pas puisque il n'y a pas de déplacement des couches du liquide les unes par rapport aux autres. Donc il y a deux types de forces qui interviennent dans la statique des fluides.

- Les forces de volume (la force de pesanteur).
- Les forces de surface c'est-à-dire les forces de pression.

1. Pression en un point d'un liquide :

Considérons un réservoir plein de liquide, et prenons un élément (un point) de fluide de largeur dy comme indique la figure ci-dessous.



Supposons que le liquide exerce une :

Pression P_x sur la surface (dzdy).

Pression P_z sur la surface (dxdy).

Pression P_s sur la surface (dsdy).

Donc les forces qui agissent sur l'élément sont : $F_x = P_x(dzdy)$, $F_z = P_z(dxdy)$, $F_s = P_s(dsdy)$, $G = \omega \frac{(dxdz)}{2} dy$

En équilibre statique, la somme des forces dans les directions x et z est égale à zéro:

a) Sur l'axe des x:

$\sum \vec{F}_{ox} = \vec{0} \Rightarrow F_x - F_s \sin\theta = 0 \Rightarrow P_x\left(dzdy\right) - \left[P_s(dsdy)\right]\sin\theta = 0$ D'où : $P_x dz - P_s ds \sin\theta = 0$

En sachant que : $dz = ds \sin\theta$, On obtient : $\boxed{P_x = P_s}$

b) Sur l'axe des z:

$$\sum \vec{F}_{oz} = \vec{0} \Rightarrow F_z - F_s \cos\theta - G = 0 \Rightarrow P_z\left(dxdy\right) - \left[P_s(dsdy)\right]\cos\theta - \omega\frac{(dxdz)}{2}dy = 0$$

D'où : $P_z dx - P_s ds\cos\theta - \omega\frac{dxdz}{2} = 0$

En sachant que : $dx = ds\cos\theta$, On obtient : $P_z - P_s - \omega\frac{dz}{2} = 0$

Si on réduit l'élément de volume à un point, le dz tend vers 0, on obtient : $\boxed{P_z = P_s}$

On déduit que : $\boxed{P_x = P_z = P_s}$

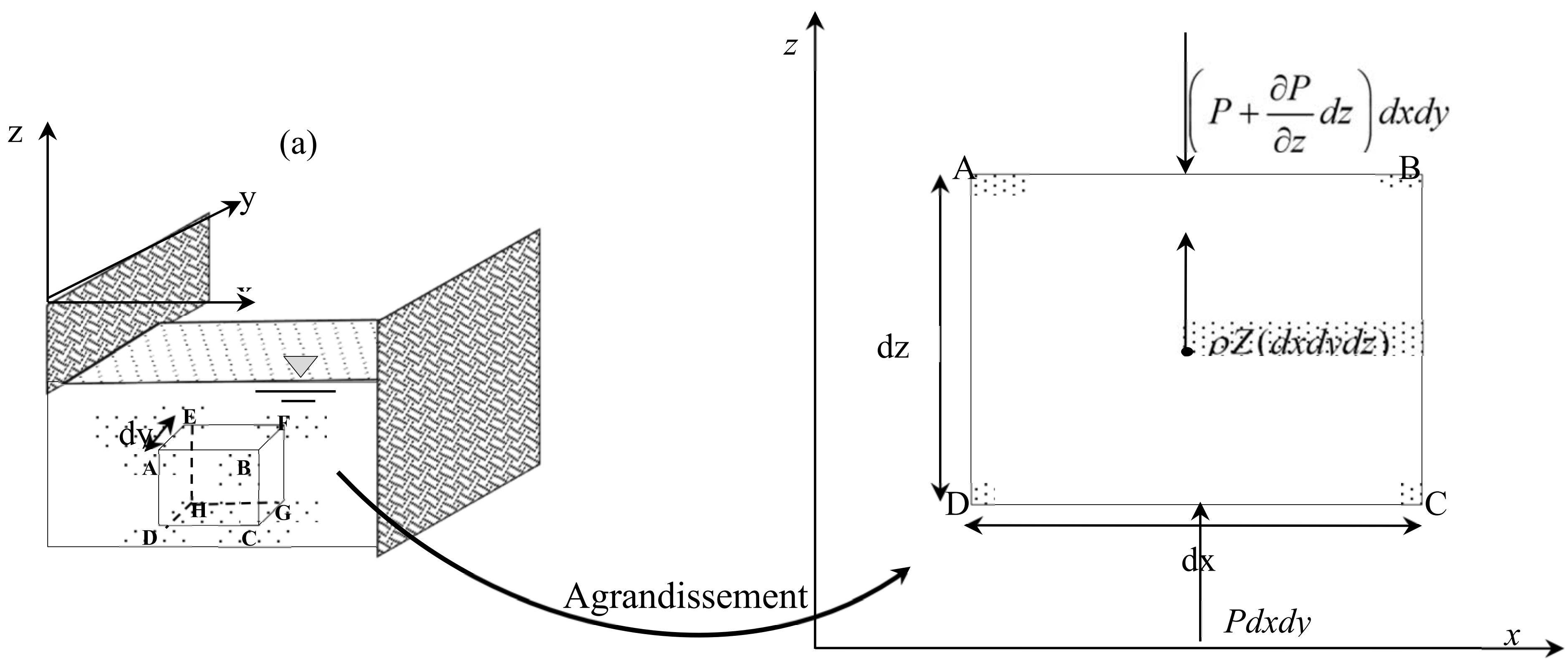
Par conséquent, la pression en un point d'un fluide est la même dans toutes les directions. C'est-à-dire la pression ne dépend pas de l'orientation.

2. Equation fondamentale de l'Hydrostatique:

Considérons un réservoir plein de liquide accéléré en bloc dans une direction quelconque et prenons un élément de fluide de volume (*dxdydz*) comme l'indique la figure ci-dessous. Cette élément infiniment petit est influencée par ; trois forces de volume et six forces de pression.

Suivant l'axe Z, nous avons:

- ✓ La force de volume: $\rho X(dxdydz)$
- ✓ La force de pression exercée sur la surface DHGC: $Pdxdy$
- ✓ La force de pression exercée sur la surface ABFE :-$\left(P + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dxdy$



La condition d'équilibre des forces selon *Z* est :

$$\sum \vec{F}_{oz} = \vec{0} \Rightarrow Pdxdy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dxdy + \rho Zdxdydz = 0$$

D'où: $\frac{\partial P}{\partial z} = \rho Z$

De la même façon, on obtient les équations d'équilibre dans autres directions x et y :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho X \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \rho Y \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \rho Z \end{cases}$$ ou sus forme vectorielle : $\overrightarrow{grad} P = \rho \vec{F}$ ….(1)

L'équation s'écrit également de la forme suivant :

$\frac{1}{\rho}(dP - \frac{\partial P}{\partial t} dt) = X dx + Y dy + Z dz$ ……(2) ***C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique.***

2.3. Application de l'équation fondamentale dans le cas d'un fluide soumis à la seule action de la pesanteur:

Orientons le trièdre de manière que OZ soit vertical et positif vers le haut, nous avons dans ce cas :

X=0, Y=0, Z=-g. $\frac{\partial ...}{\partial t} = 0$ permanant

L'équation devient : $\frac{1}{\rho} dP = -g dz$ ou $dP + \rho g dz = 0$ …..(3)

L'équation N°03 montre que la pression varie uniquement avec la distance verticale z.

l'intégration de l'équation (3) entre deux points quelconque, 1 et 2, donne : $\frac{1}{\rho}\int_{P_1}^{P_2} dP = -g \int_{z_1}^{z_2} dz$

$\Rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g \left(z_2 - z_1\right)$ ……(4) $\Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + z_2$ ….(5)

Avec : P: Pression effective (absolue)

z: Hauteur de position (énergie de position par unité de poids)

$\frac{P}{\rho g}$: Hauteur piézométrique (énergie de pression par unité de poids)

$\frac{P}{\rho g} + z$: Charge piézométrique (énergie potentielle par unité de poids).

L'équation (5) montre que la charge piézométrique est la même en n'importe quel point d'un fluide au repos.

On peut écrire l'équation (4) sous la forme suivante $P_1 = P_2 + \rho g h$. En pratique, la pression à la surface est la pression atmosphérique $P_2 = P_{atm}$, et la pression effective ou manométrique est : $P_{eff} = \rho g h$.

La surface isobare (la surface d'égale pression): est une surface dont tous les points sont soumis à la même pression P=cte, c.-à-d. pas de variation de pression dP=0, donc l'équation (3) devient: dz=0, d'où z=cte.

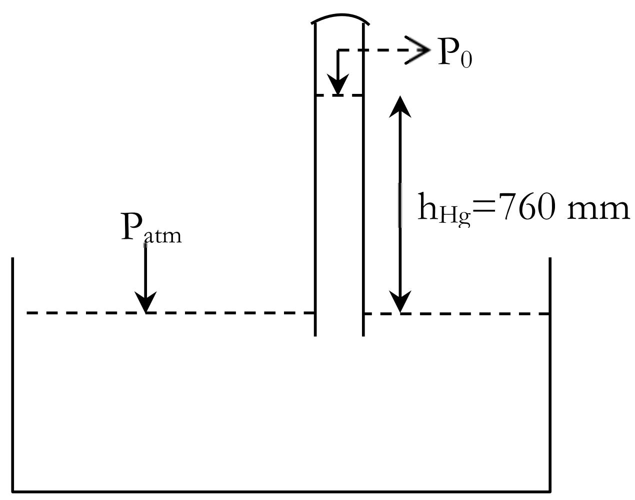
2. Mesure de la pression :

Pour mesurer la pression dans le liquide on utilise, le plus souvent, les appareils à liquide et les appareils mécaniques.

2.2.1. Les appareils à liquide:

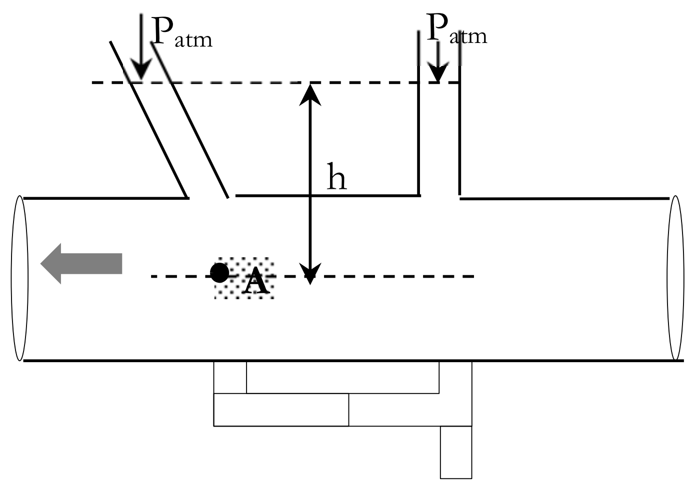
Les lois de l'hydrostatique sont appliquées pour mesurer la pression absolue et effective; on site à titre d'illustration le baromètre, le piézomètre et le manomètre.

a) **Le baromètre**: est un appareil qui est utilisé pour mesurer la pression atmosphérique.il est constitué d'un tube gradué, rempli de mercure, renversé sur un récipient ouvert contenant du mercure. Sous l'action de la pression atmosphérique exercé par l'aire sur la surface du liquide, le mercure s'elève à une hauteur de 760mm, c'est-à-dire P_{atm} = 100875 Pa. Si on change le mercure par l'eau, dans ce cas l'eau monte à une hauteur de 10 m.



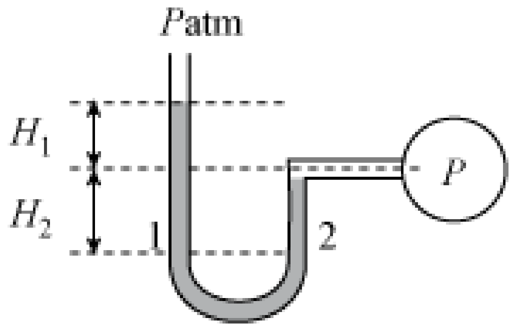
Mesure de la pression atmosphérique par le Baromètre de Torricelli

b) **Piézomètre**: est un tube mince (13 mm environ) vertical ou incliné connecté au fluide et ouvert de l'autre bout. Il permet de mesurer la pression absolue et effective (surpression ou dépression). Ce dispositif est déconseillé lorsque la pression est très élevée ou bien très faible, car les lectures deviennent imprécises.



Mesure de pression par un piézomètre

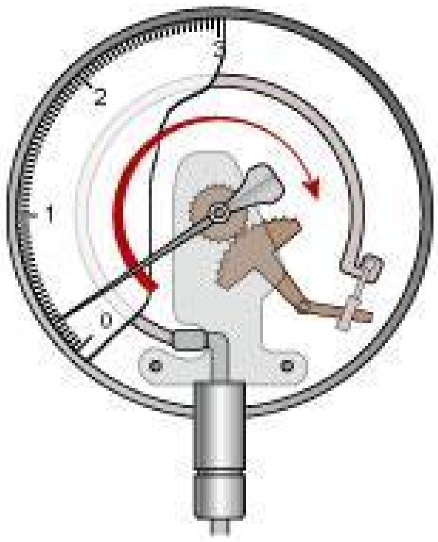
c) **Le manomètre**: c'est un appareil qui est composé d'un ou plusieurs tubes transparents en forme U, rempli d'un ou plusieurs liquides. Il permet de mesurer la pression absolue ou effective d'un liquide en mouvement ou au repos. Le manomètre peut aussi être utilisé pour mesurer la différence de pression entre deux points, est appelé **manomètre différentiel.**



Manomètre différentiel à liquide

2.2.2. Les appareils mécaniques:

Ils existent d'autres appareils mécaniques qui n'utilisent pas dans leur principe les lois de l'hydrostatique. Parmi ces appareils de ce type, les plus répondu sont les manomètres et les vacuomètres à ressort comme le montre le schéma ci-dessous.



Manomètre mécanique (tube de Bourdon)

3. Force de pression hydrostatique :

Dans l'hydrotechnique, l'intérêt pratique est porté à la force de la pression effective du liquide sur la surface. Il est évident que pour dimensionner et réaliser par la suite un ouvrage hydraulique, un barrage par exemple, on doit tout d'abord déterminer l'intensité de la force de pression manométrique exercée par le liquide sur le corps de barrage ainsi que son point d'application. Les parties des ouvrages hydrotechniques qui subissent une pression hydrostatique peuvent être planes, courbes ou de forme quelconques. De ce faite, nous allons étudier les deux cas suivants :

-Force hydrostatique sur une surface plane (verticale, horizontale ou incliné).

- Force hydrostatique sur une surface courbe.

3.1. Force hydrostatique sur une surface plane:

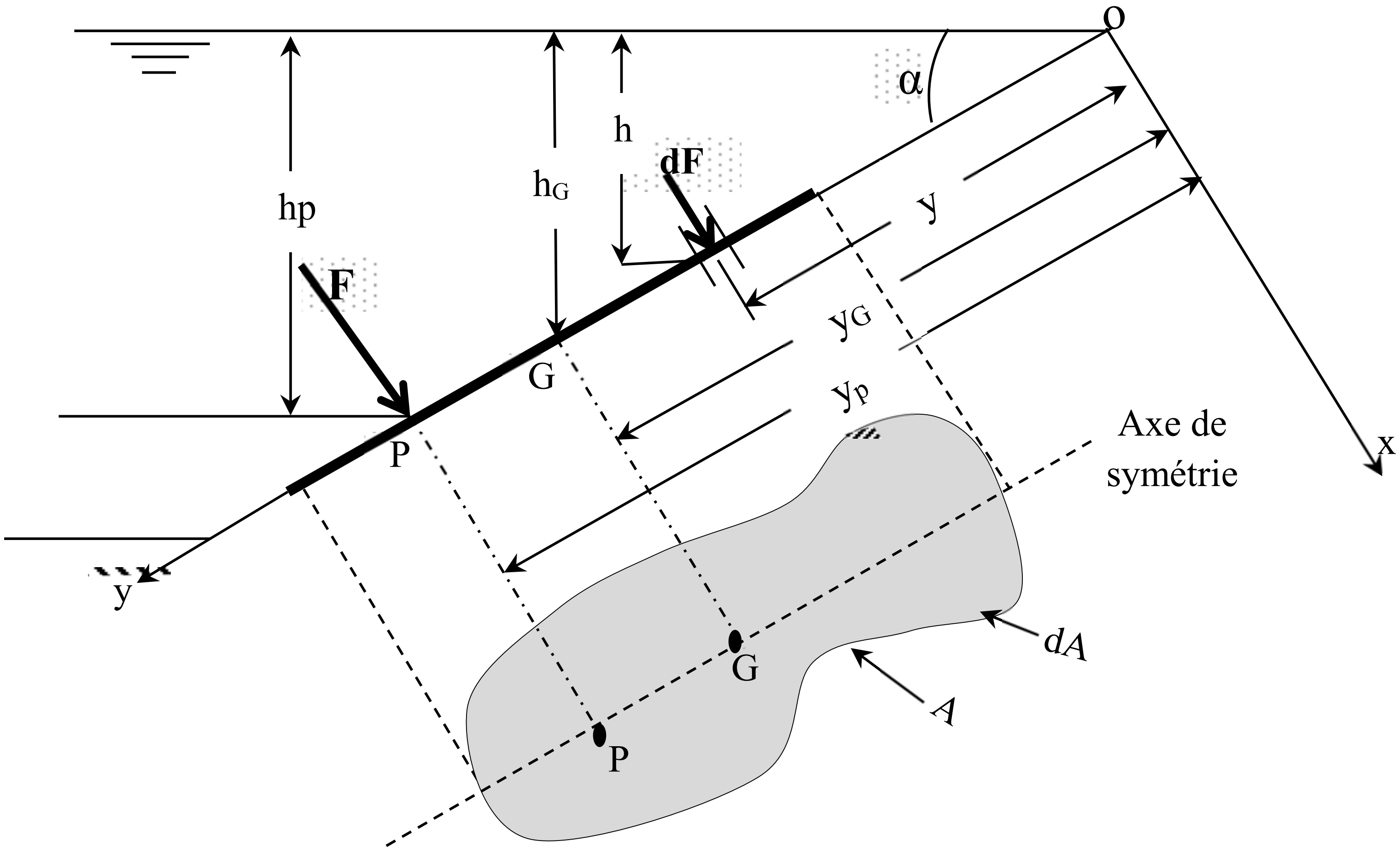
3.1.1. Intensité de la force :

Chaque point d'une surface plane inclinée ou verticale en contact avec le liquide est soumis à une pression différente en fonction de la profondeur d'immersion. C'est pourquoi pour déterminer la force résultante de pression sur une paroi plane, il est impossible d'appliquer la formule *F=P.A*, mais une autre forme qu'on va démontrer ci-après :

Considérons une paroi plane de surface *A* immergée dans un liquide. Elle est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontal, et soumise à une pression *P*.

La force agissant sur sur la surface *dA* est : $dF=PdA=\rho ghdA$.

En additionnant les forces élémentaires de pression sur toute l'élément de surface, on obtient la force résultante agissant sur la surface *A*:



La force de pression et le centre de poussée d'un liquide sur une surface plane quelconque

$$F=\int_A dF=\int_A \rho.g.h.dA=\int_A \rho.g.y\ \sin\alpha dA=\rho.g.\sin\alpha\int_A ydA=\rho g.\sin\alpha.y_G.A=\rho gh_G A$$

$\int_A ydA$: est le moment statique de la surface par rapport à la surface libre.

h_G et y_G représentent respectivement la profondeur et la cordonnée le long de l'axe y du centre de gravité.

3.1.2. Centre de poussée (point d'application):

Afin de déterminer la position du point d'application de la force de pression résultante sur la surface subissant la pression du liquide, on utilise le principe de la mécanique théorique sur *; l'égalité du moment résultante à la somme des moments des composantes par rapport à l'axe OX situé sur la surface du liquide*, on écrit :

$M_{F/OX}=\sum M_{/OX}$: Moment résultant d'une force F par rapport à l'axe OX est égale à la somme des moments des composantes par rapport à l'axe OX.

$M_{F/OX}=F*$(Distance entre ox et la droite d'action de F).

$\Rightarrow\ M_{F/OX}=F.y_p=\rho gh_G Ay_p=\rho gy_G\sin\alpha Ay_p$ ……….(1)

$\sum M_{/OX}=\int ydF=\int y\,\rho ghdA=\int y\,\rho gy\ \sin\alpha dA=\rho g\sin\alpha\int y^2dA=\rho g\sin\alpha.I_{OX}$ …..(2)

Sachant que $I_{OX}=\int y^2dA$: est le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe OX.

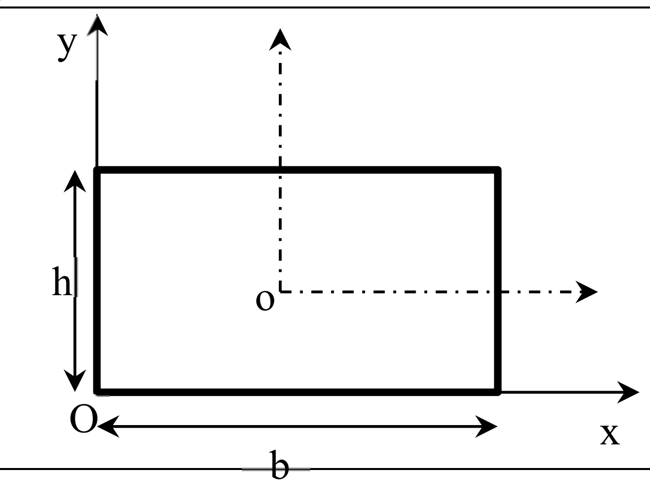
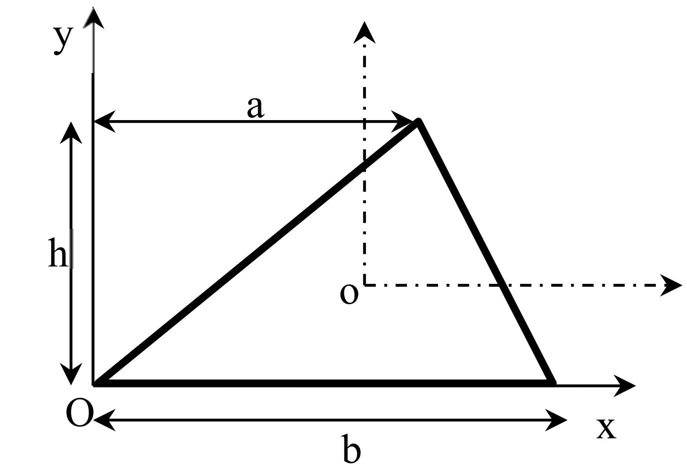
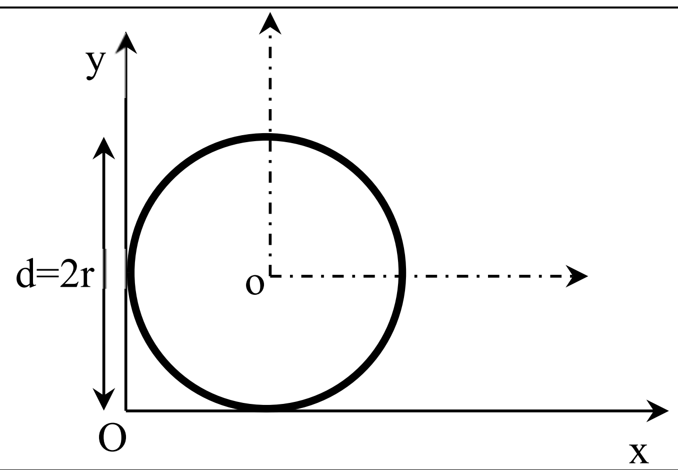
En égalant l'équation (1) et (2), on obtient : $\rho gy_G\sin\alpha Ay_p=\rho g\sin\alpha.I_{OX}\Rightarrow\ \boxed{y_p=\frac{I_{OX}}{y_G.A}}$ ….(3)

Pour les calculs, il est plus pratique de remplacer le moment d'inertie I_{OX} par rapport à OX par le moment d'inertie I_G par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité. A cet effet, en utilisant, le théorème de **Huyghens**; $I_{OX} = I_G + y_G^2.A$ ……(4).

En combinant les équations (3) et (4), on obtient: $y_p = \dfrac{I_{OX}}{y_G.A} = \dfrac{I_G + y_G^2.A}{y_G.A} = \boxed{y_G + \dfrac{I_G}{y_G.A}}$ ….(5)

On peut l'écrire aussi sous la forme : $\boxed{h_p = h_G + \dfrac{I_G.\sin^2\alpha}{h_G.A}}$ ……(6)

Surfaces coordonnées du centre de gravité et moment d'inertie de quelques cas :

Figure	Surface A, Xc, Yc, Iox, I_G
	A= bxh, $Xc = \dfrac{b}{2}$, $Yc = \dfrac{a}{2}$, $I_{ox} = \dfrac{bh^3}{3}$ $I_G = \dfrac{bh^3}{12}$,
	$A = \dfrac{bxh}{2}$, $Xc = \dfrac{a+b}{3}$, $Yc = \dfrac{h}{3}$, $I_{ox} = \dfrac{bh^3}{12}$ $I_G = \dfrac{bh^3}{36}$,
	$A = \dfrac{\pi d^2}{4}$, $Xc = \dfrac{d}{2}$, $Yc = \dfrac{d}{2}$, $I_{ox} = \dfrac{5}{64}\pi d^4$ $I_G = \dfrac{1}{64}\pi d^4$,

3.2. Force hydrostatique sur une surface courbe:

3.2.1. Intensité de la force :

Les forces élémentaires de pression sur une surface courbe d'un seul centre de courbure sont normales à elle. Et par conséquent, la force résultante F peut être décomposée en composantes *Fx* et *Fz*, parallèles aux axes de coordonnées. L'intensité de la force résultante est : $F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$.

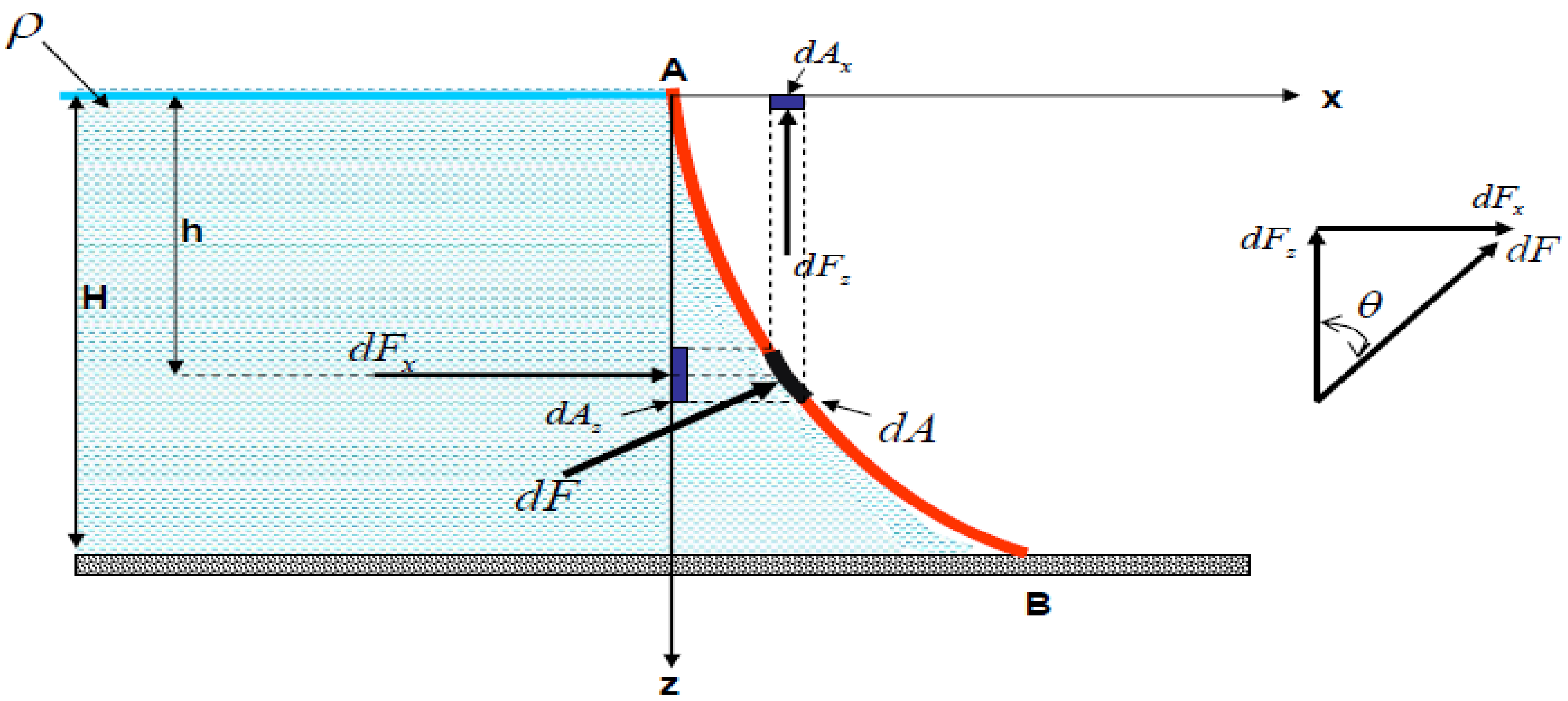
La composante horizontale de la force sur toute la surface est définie comme la somme des forces élémentaires Nous avons; $dF_x = dF.\sin\theta = \rho.g.h\,dA.\sin\theta = \rho.g.h\,dA_z$ car $dA_z = dA.\sin\theta$

D'où; $F_x = \int_A dF_x = \rho.g.\int_A h\,dA_z = \rho g h_G A_z$

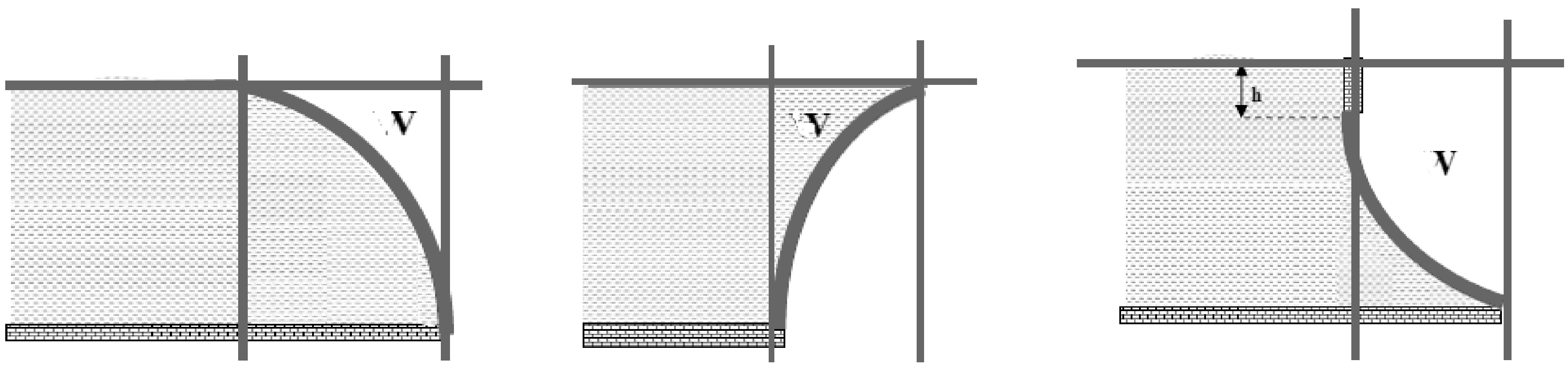
La composante verticale de la force de pression, est calculée de la même manière; en ajoutant le poids du liquide dans la partie ABOA: $dF_z = dF.\cos\theta = \rho.g.h\,dA.\cos\theta = \rho.g.h\,dA_x$ car $dA_x = dA.\cos\theta$

D'où; $F_z = \int dF_z = \rho.g.\int_{Ax} h\,dA_x = \rho g\int_V dV = \rho g V$

Avec V délimité par une surface courbe, sa projection sur la surface libre et les plans des projections verticaux.



Autres exemple de délimitation du volume W:



3.2.2. Centre de poussée (point d'application):

Le point k d'intersection entre la force résultante F avec la surface courbée AB est appelé "Centre de poussée". Son angle d'inclinaison θ avec l'horizontale est peut être calculé par : $\theta = Arc\tan\frac{F_z}{F_x}$, les coordonnées peuvent être calculées à l'aide des formules suivantes: ($x_k = r\cos\theta$; $z_k = r\sin\theta$).

3.3. Hydrostatique dans un autre champ de force :

Dans certains cas particuliers, d'autres champs sont à prendre en considération. Les équations fondamentales générales de l'hydrostatique sont valables s'il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules de fluide, elles sont donc aussi valables si le fluide est accéléré en bloc comme un corps solide. On s'intéresse aux deux cas suivants :

- Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec accélération constante.
- Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec rotation uniforme.

3.3.1. Champ de pesanteur avec accélération constante:

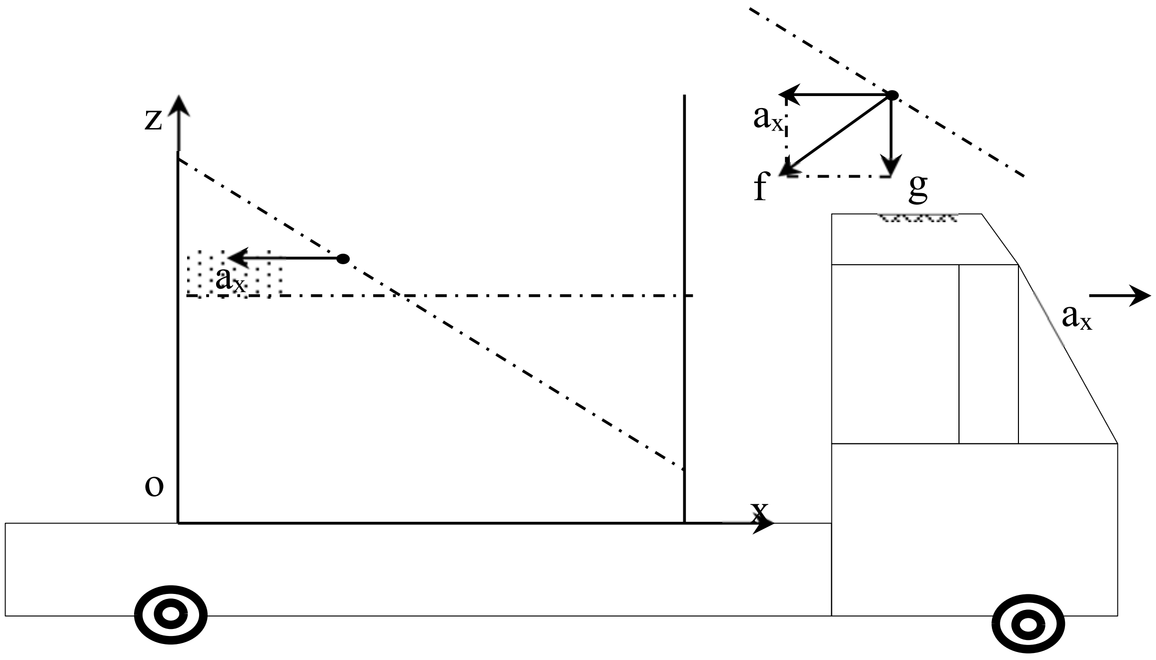
a) Accélération uniforme verticale :

Soit un liquide homogène soumis à une accélération constante a_x, donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -a_x \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g \end{cases} \Rightarrow \text{Donc; } dp=-\rho a_x dx-\rho g dz \quad \text{d'où: } z+\frac{p}{\rho g}+\frac{a_x}{g}x = Cst.\ldots\ldots(1)$$

En surface isobare: p=Cst et dp=0. Donc l'équation (1) devienne : $z=-\frac{a_x}{g}x+Cst.\ldots.(2)$,

c'est l'équation générale des lignes d'égale pression, dont $(-\frac{a_x}{g})$ ***représente la pente.***



b) Accélération uniforme verticale :

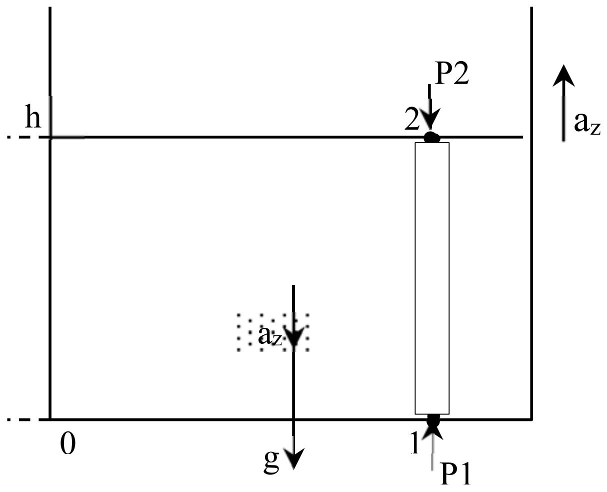
Vers le haut:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -a_z - g \end{cases} \Rightarrow \text{Donc; } dp=-\rho(a_z+g)dz,; \text{ d'où} \int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho(a_z+g)\int_0^h dz$$

En intégrant ; $P_2 - P_1 = -\rho hg\left(1+\frac{a_z}{g}\right)$ d'où: P_2: pression atmosphérique, P_1: pression absolue

Donc; $P_{abs}= P_{atm}+ P_{réel}= P_{atm}+ \rho hg\left(1+\frac{a_z}{g}\right)$.

Par la même manière, la pression absolue vers le **bas** est définie par : $P_{abs}= P_{atm}+\rho hg\left(1-\frac{a_z}{g}\right)$.



3.3.2. Champ de pesanteur avec rotation uniforme:

Supposons une masse liquide tourne avec une vitesse angulaire ω autour l'axe OZ. Les forces extérieures agissantes sont le poids ($-g$) et la force centrifuge ($\omega^2 x$), appliquons l'équation de l'hydrostatique:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z \end{cases} \Rightarrow \text{Coordonnées cylindriques} \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = \omega^2 r \\ \frac{1}{r\rho}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g \end{cases} \Rightarrow \text{Donc; } dp=\rho\,\omega^2 r\,dr-\rho g dz\ldots\ldots(3)$$

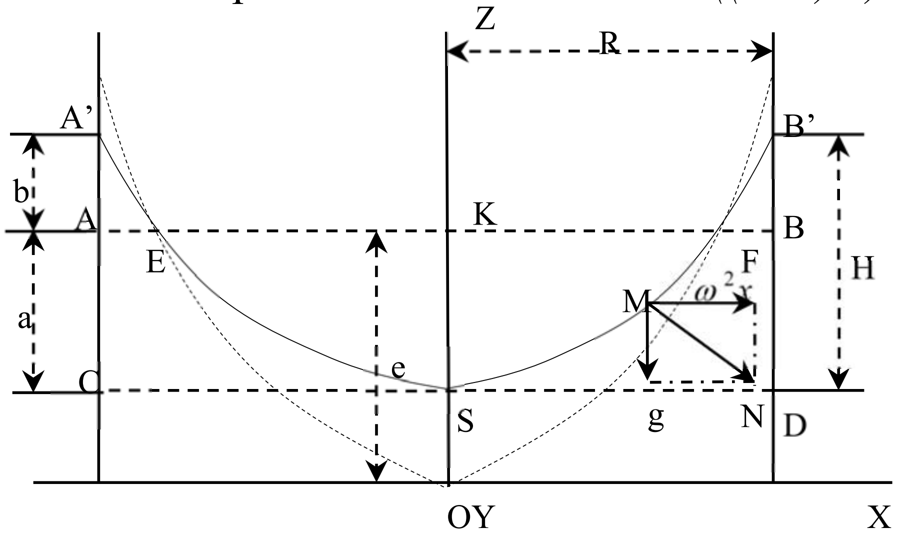
En surface isobare: p=Cst et dp=0. Donc l'équation (1) devient: $z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}+Cst=\frac{\omega^2 r^2}{2g}+z_0$ ……(4)

C'est l'équation générale des lignes d'égale pression qui sont des paraboles symétriques par rapport à l'axe de rotation.

Au repos, le volume de l'air A'ABB' est; $\pi R^2 a$, le volume de l'eau ACDB est ; $\pi R^2 b$.

A l'état de mouvement, le volume de l'air est devenu une calotte A'ESFB' : $(1/2)\pi R^2 H= \pi R^2((a+b)/2)$

Comme le volume d'eau et d'air n'ont pas varié donc $\pi R^2 b= \pi R^2((a+b)/2)$ d'où; $a=b$.



4. Equilibre des corps flottants :

4.1. Poussée d'Archimède:

Un corps plongé dans un liquide subit à l'action de la force de pression exercée par le liquide sur sa surface.

Sur ACB : $F_{v_1} = \varpi V_{EABCF}$

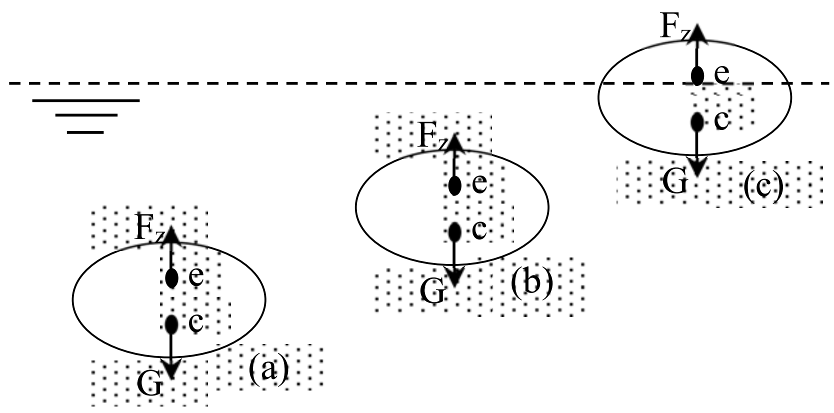
Sur ADB : $F_{v_2} = \varpi V_{EADCF}$

Force vertical résultante Fv : $F_v = F_{v_2} - F_{v_1} = \varpi V$

V : volume du corps immergé

Le point d'application de la résultante F_v est appelée centre de Carène.

4.3. Les conditions de flottation :



a) Le corps coule P>F
b) Le corps flotte en position totalement immergé $P = F = \varpi V$ (condition de flottation)
c) Le corps émerge (ou le corps flotte en position) partiellement immergé P<F

P : le poids du corps

F : poussée d'ARCHIMEDE

4.3.Stabilité du corps flottant :

Elle se manifeste par l'action d'un couple de force engendrée par un déplacement angulaire du corps. L'équilibre peut être stable, instable et indifférent.

- **Cas a : Equilibre stable :**

  Un petit déplacement angulaire engendre un couple de forces tendant à rétablir la position d'équilibre initial.

- **Cas b : Equilibre instable :**

  Lorsque le couple de forces tend à augmenter le déplacement angulaire. La stabilité est réalisée lorsque G est situé au-dessous de C.

- **Cas c : Equilibre indiffèrent :**

  Il peut également arriver que G soit au-dessus de C et que l'équilibre du corps flottant soit stable ceci est dû à ce que le volume immergé change de forme et que C

Le point m est appelé métacentre : c'est le centre de courbure du courbe cc' décrite à l'intérieur du corps flottant pas le centre de Carême.

$r = mc = mc'$ est appelé le rayon métacentrique.

Rayon de la courbure cc'

La condition de stabilité : $r > a \Rightarrow r - a > 0$

r-a : la hauteur métacentrique

$mc - mG > 0$

A : est la distance entre les points c et G

On peut démontrer que : $r = \dfrac{I}{V}$

I : le moment d'inertie de la section par rapport à la basse oo'

V : volume de la carere.

$r - a > 0 \Rightarrow \dfrac{I}{V} - a > 0$

La stabilité est autant meilleure lorsque $r = \dfrac{I}{V}$ est plus grand qu'a plus petit.

Application :

Parallépipéde de largeur 2*b*

Condition de stabilité ?