CHAPITRE III : HYDRODYNAMIQUE DES FLUIDES

Introduction :

La dynamique des fluides consiste à étudier le mouvement des particules fluides soumises à un système de forces. Si les forces dues à la viscosité ne se manifestent pas, il n'y a donc pas de mouvement relatif entre les particules du fluide; on parle alors de l'hydrodynamique des fluides parfaits.

Ce chapitre traite du développement et des applications des équations d'Euler et de Navier-Stokes de mouvement des fluides parfaits et réels et aussi des équations de Bernoulli et de la quantité de mouvement.

1. Equations générales du mouvement (Equations d'Euler):

En hydrostatique, nous avons établi les équations d'équilibre d'un parallélépipède élémentaire pris dans d'un masse liquide au repos, c'est-à-dire soumis à l'action des force de volume (pesanteur) et de surface (pression). En hydrodynamique, il suffit donc d'ajouter, au second membre, la force **d'inertie** par unité de masse, ce qui conduit à l'équation fondamentale :

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P = \vec{\gamma} \quad \ldots\ldots(1)$$

Cette équation vectorielle projetée sur les axes fournit les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dw}{dt} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dv}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dt} \end{cases} \quad \ldots\ldots..(2)$$

Ce sont les équations générales du mouvement des fluides parfaits, appelées équations d'Euler.

1.1. Equation fondamentale de l'hydrodynamique des fluides parfaits :

En multipliant la première équation du système précédent par dx, la seconde par *dy*, la troisième par dz et on additionne, on obtient ainsi :

$\frac{1}{\rho}(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz) = (Xdx + Ydy + Zdz) - (\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dy + \frac{\partial w}{\partial t}dz)$ le premier membre de cette équation est égale à $\frac{1}{\rho}(dP - \frac{\partial P}{\partial t}dt)$, et nous avons aussi : $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$ le deuxième terme du second membre devient donc : $udu+vdv+wdw$,

Or, V la vitesse de la molécule qui passe en $M(x,y,z)$ au temps t: $V^2= u^2+v^2+w^2$ Donc : $VdV= udu+vdv+wdw$

En définitive l'équation obtenue s'écrit encore :

$$\frac{1}{\rho}(dP - \frac{\partial P}{\partial t}dt) = Xdx + Ydy + Zdz - VdV \quad \ldots\ldots(3)$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrodynamique des fluides parfaits.

2. Equation caractéristique :

On l'appelle aussi parfois *"équation complémentaire"*. Comme nous l'avons établi en hydrostatique, pour un liquide supposé incompressible, cette équation s'écrit **ρ=constante.**

3. Equation de continuité :

Elle exprime que le fluide est continu, c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir dans aucune partie du fluide ni apport extérieur, ni prélèvement de matière. La masse se conserve au cours de l'écoulement (sauf cas particulière de cavitation que nous excluons ici). Pour établir cette équation, considérons un parallélépipède élémentaire de fluide de volume *dxdydz.*

Pendant le temps dt il entre par la face ABCD une masse de fluide égale à : $dydz\,(u\,\rho)dt = (\rho u)dydzdt$.

Pendant le même temps, il sort par la face EFGH une masse de fluide égale à celle qui est entrée augmentée de sa différentielle partielle par rapport à *x*. Or seuls u et ρ peuvent varier par rapport à *x*.

La masse qui sort est donc : $(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,)dydzdt$

La différence de ces deux expressions, soit : $-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydzdt$ ceci représente l'accroissement de masse du parallélépipède correspondant au mouvement du fluide à travers les deux faces envisagées.

On peut faire un raisonnement similaire pour déterminer l'accroissement de la masse pour les autres faces. Donc l'accroissement total de la masse fluide pendant le temps *dt* est : $-(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z})dxdydzdt$ ….(4)

Dun autre côté, Puisque la masse du parallélépipède est restée constante pendant *dt*, cette accroissement est obligatoirement égal à l'accroissement de masse de volume multiplié par le volume, soit : $\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydzdt$ …(5)

D'où l'égalité : $\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydzdt = -(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z})dxdydzdt$ on écrit :

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$…..(6) ***c'est l'équation de continuité pour un fluide parfait.***

On peut associer cette équation à l'équation caractéristique **(ρ=constante)** l'équation devient : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ou \quad div\vec{V} = 0$

3.1. Forme particulière de l'équation de continuité :

Forme particulière de l'équation de continuité dans le cas d'un écoulement d'un liquide où toutes les vitesses sont perpendiculaires à une section transversale plane du courant et égales entre elles.

Si, comme c'est fréquemment le cas, le mouvement du liquide s'effectue de telle façon que, dans une section transversale plane, toutes les vitesses soient normales à ce plan et égale entre elles, l'équation de continuité peut se mettre sous le forme : $\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial S}=0 \ldots(7)$

4. Cas particulier du mouvement permanant :

Le mouvement d'un fluide est permanant en un point quelconque de la masse en mouvement, les molécules en ce point qui succèdent la même vitesse, la même pression et la même masse volumique. Par contre si les paramètres V, P et ρ varient en un point en fonction du temps, le régime est dit "*variable*".

En supposant : l'écoulement permanant $\frac{\partial \ldots}{\partial t}=0$, incompressible **(ρ=constante)**, soumis à la seule action de la pesanteur : X=0, Y=0, Z=-g, l'équation (3) s'écrit : $\frac{1}{\rho} dP=-gdz-VdV$ On intégrons:

$$\frac{P}{\rho}+gz+\frac{V^2}{2}=C^{te}$$

Ou $\frac{P}{\rho g}+z+\frac{V^2}{2g}=H=C^{te}$ c'est le **théorème de BERNOULLI.**

a) L'interprétation géométrique du théorème de Bernoulli est la suivante :

Z: est appelé hauteur de position.

$\frac{P}{\rho g}$: est appelé hauteur due à la pression.

$\frac{P}{\rho g}+z$: est appelé la charge piézométrique.

$\frac{V^2}{2g}$: est appelé hauteur due à la vitesse

$\frac{P}{\rho g}+z+\frac{V^2}{2g}=H$: est appelé la hauteur hydrodynamique.

b) L'interprétation énergétique du théorème de Bernoulli est la suivante :

Z: est appelé énergie de position par unité de poids.

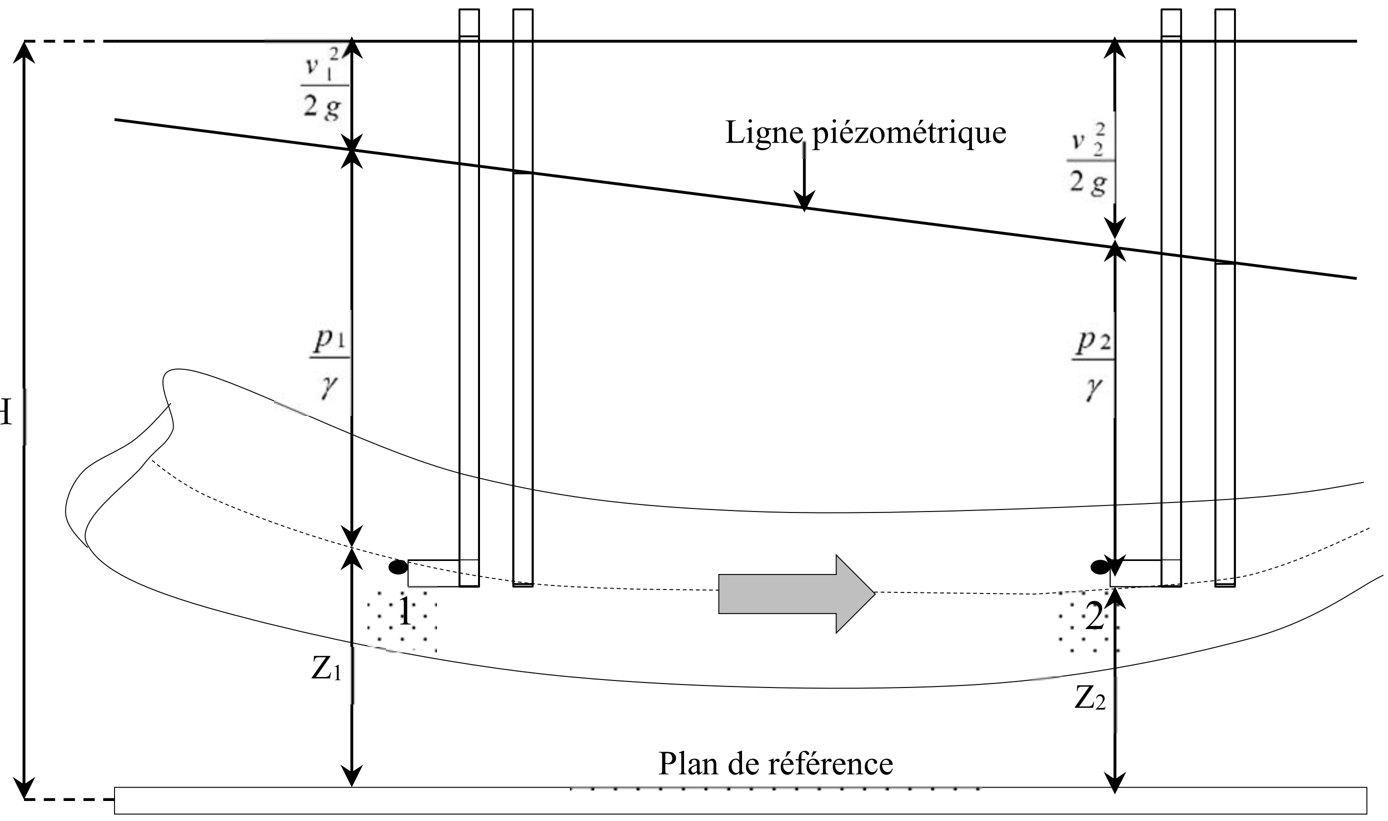
$\frac{P}{\rho g}$: est appelé énergie de pression par unité de poids.

$\frac{P}{\rho g}+z$: est appelé énergie potentielle par unité de poids.

$\frac{V^2}{2g}$: est appelé énergie cinétique par unité de poids.

$\frac{P}{\rho g}+z+\frac{V^2}{2g}=H$: est appelé énergie mécanique totale par unité de poids.

c) La représentation graphique du théorème de Bernoulli:



5. Equations générales du mouvement d'un liquide réel (Equations de Navier-Stokes):

On obtient ces équations, en adjoignant les forces de viscosité, aux autres forces s'exerçant sur un parallélépipède. Autrement dit, nous devons écrire l'équilibre du système des forces suivantes :

-Forces de volume.

-Forces de surfaces (de pression et de viscosité).

-Forces d'inertie.

Dans le but d'établir les équations de Navier-Stokes, Il suffit d'ajouter aux équations d'Euler les composantes sur l'axe correspondant les forces de viscosité par unité de masse.

5.1. L'expression de force de viscosité :

Considérons les projections sur l'axe Ox

a) Composante σ_1 : sur la face ABCD: $\sigma_1 dydz$

sur la face EFGH: $-\left(\sigma_1+\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}dx\right)dydz$

Résultante : $-\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}dxdydz$

b) Composante τ_2 : sur la face CGHD: τ_2 dxdy

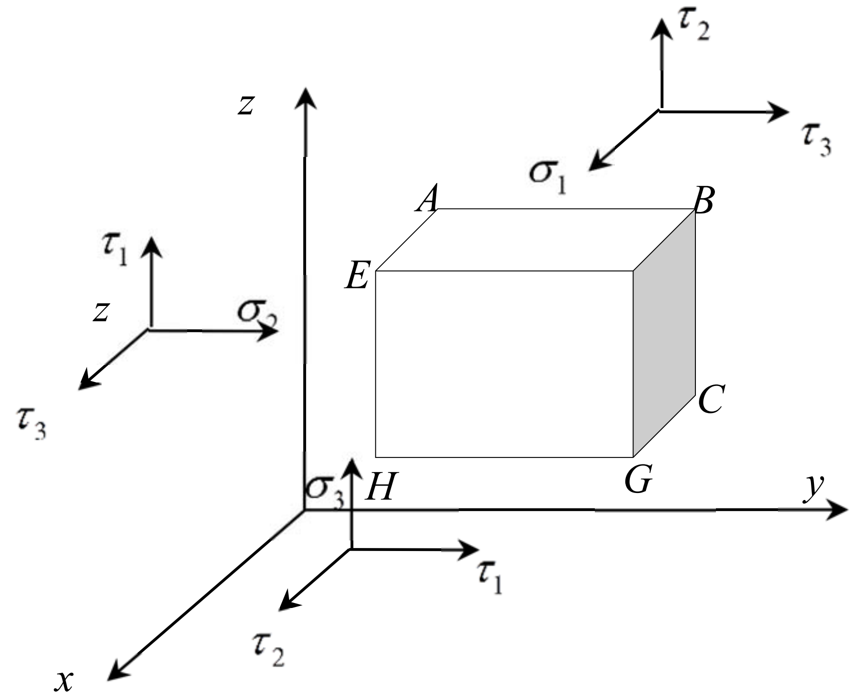
sur la face ABFE: $-\left(\tau_2+\frac{\partial\tau_2}{\partial z}dz\right)dxdy$

Résultante : $-\frac{\partial\tau_2}{\partial z}dzdxdy$

c) Composante τ_3 : sur la face ADHE: τ_3 dxdz

sur la face BCGF: $-\left(\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy\right) dxdz$

Résultante : $-\frac{\partial \tau_3}{\partial y} dydxdz$



Les autres composantes σ2, σ3, τ_1, τ_2 et τ_3 sont perpendiculaires à OX et leur projection est donc nulle. En définitive, la résultante des forces sur l'axe OX est : $-\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z}\right) dxdydz$

En remplace $\sigma_1 = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$, $\tau_3 = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, $\tau_2 = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

On obtient : $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = -2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$= = -\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$

Puisque: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = div\vec{V} = 0$, Par ailleurs $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Les forces résultantes de viscosité projetée sur l'axe OX s'est écrit :

$-\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z}\right) dxdydz = \mu \Delta u dxdydz$.

Donc l'expression de la force de viscosité est $\frac{\mu}{\rho}\Delta u = \nu \Delta u$

Dans le but d'établir les équations de Navier-Stokes, Il suffit d'ajouter aux équations d'Euler les composantes sur l'axe correspondant les forces de viscosité par unité de masse.

$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad} P = \vec{\gamma} - \nu\Delta\vec{V}$ …….(8)

Cette équation vectorielle projetée sur les axes fournit les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{du}{dt}-\nu\Delta u \\ Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{dv}{dt}-\nu\Delta v \\ Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{dw}{dt}-\nu\Delta w \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}-\nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}-\nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}-\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

Ce sont les équations générales du mouvement des fluides réels, appelées équations de Navier-Stokes.

5.2. Equation fondamentale de l'hydrodynamique des fluides réels:

En multipliant la première équation du système précédent par dx, la seconde par dy, la troisième par dz et on additionne, on obtient ainsi :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)=(Xdx+Ydy+Zdz)-\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx+\frac{\partial v}{\partial t}dy+\frac{\partial w}{\partial t}dz\right)+\nu(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)$$

le premier membre de cette équation est égale à $\frac{1}{\rho}(dP-\frac{\partial P}{\partial t}dt)$, et nous avons aussi :

$$\frac{dx}{dt}=u \ , \frac{dy}{dt}=v \ , \ \frac{dz}{dt}=w$$

Le deuxième terme du second membre devient donc : udu+vdv+wdw,

Or, V la vitesse de la molécule qui passe en M(x,y,z) au temps t: $V^2= u^2+v^2+w^2$ Donc : VdV= udu+vdv+wdw

En définitive l'équation obtenue s'écrit encore :

$$\frac{1}{\rho}(dP-\frac{\partial P}{\partial t}dt)=Xdx+Ydy+Zdz-VdV+\nu(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)\ldots\ldots(3)$$ ***C'est l'équation fondamentale de l'hydrodynamique des fluides parfaits.***

5.3. Cas particulier du mouvement permanant :

En supposant : l'écoulement permanant $\frac{\partial ...}{\partial t}=0$, incompressible **(ρ=constante)**, soumis à la seule action de la pesanteur : X=0, Y=0, Z=-g, l'équation (3) s'écrit : $\frac{1}{\rho}dP=-gdz-VdV+\nu(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)$

On intègre: $\frac{P}{\rho}+gz+\frac{V^2}{2}-\nu\int(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)=C^{te}$

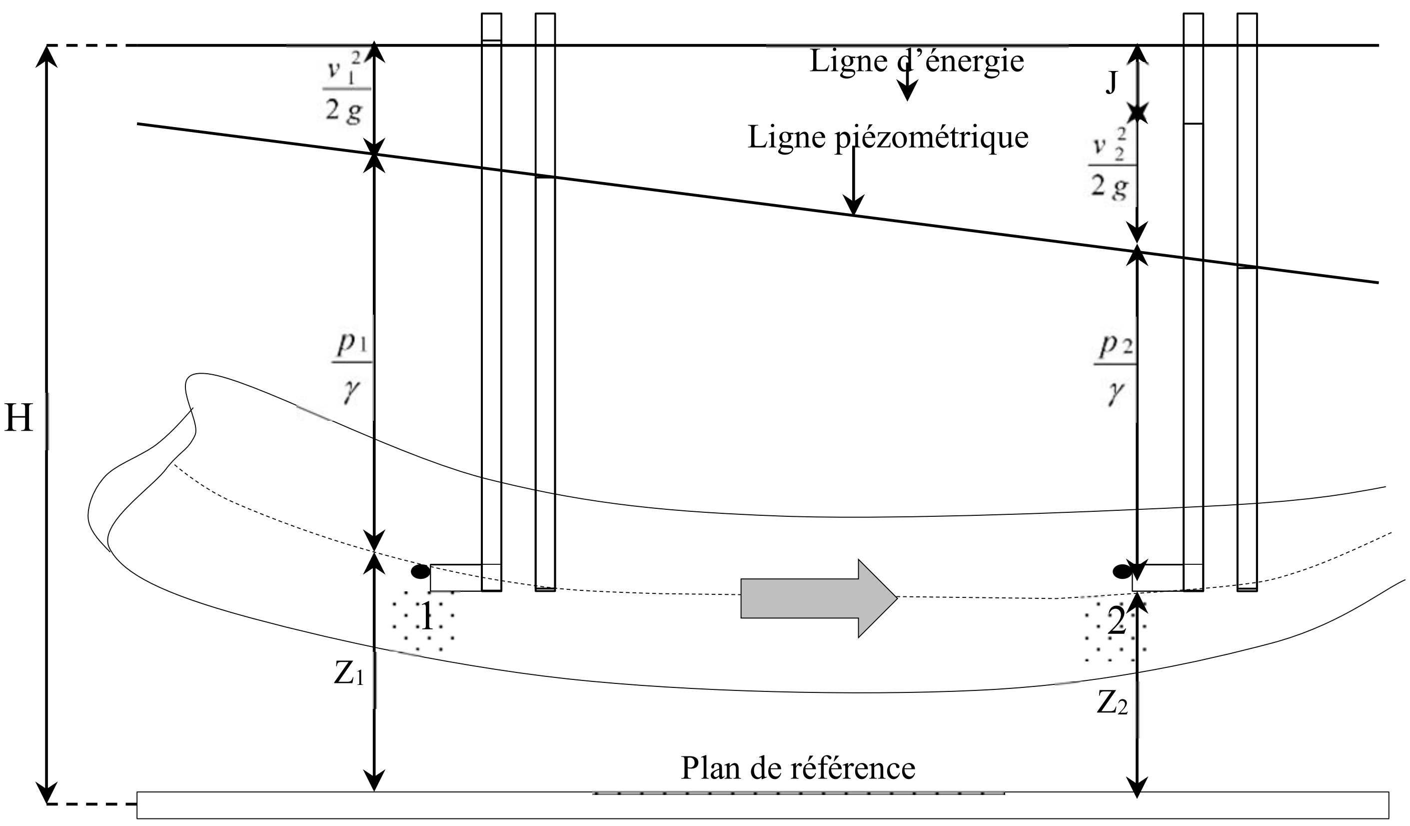
Ou $\frac{P}{\rho g}+z+\frac{V^2}{2g}-\frac{\nu}{g}\int(\Delta udx+\Delta vdy+\Delta wdz)=C^{te}=H$ ***C'est le théorème de BERNOULLI généralisée.***

Puisque nous avons $\partial^2 V$ (LT^{-1}); $\partial^2 x$ (L^2); ν ($L^2 T^{-1}$)0 et dx(L), il est facile de montrer que le terme $\frac{\nu}{g}\int(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz)$ a les dimensions d'une longueur. Il représente ce qu'on appelle la perte de charge; n le désigne par **J**.

$$J = \frac{\nu}{g}\int(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz)$$

L'équation s'écrive alors : $\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} - J = C^{te} = H$ ***C'est le théorème de BERNOULLI généralisée (Extension).***

a) La représentation graphique du théorème de Bernoulli:



Remarque :

En présence d'une pompe et d'une turbine entre deux sections d'écoulement 1-1 et 2-2, l'équation de Bernoulli s'écrira :

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - J + H_p = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + H_T$$

H_p: Charge délivrée par la pompe = Energie par unité de poids fourni par la pompe.

H_T: Charge délivrée à la turbine = Energie par unité de poids fourni à la turbine.

La puissance délivrée par la pompe est donnée par : $W_p = \omega Q H_p$. (Nm/s=Watts)

La puissance délivrée à la turbine est donnée par : $W_p = \omega Q H_T$. (Nm/s=Watts)