تعتبر نظرية الاحتمال نظرية رياضية تدرس الظواهر العشوائية، لذلك سنحاول إعطاء تقديم لأهم مبادئ هذه النظرية من خلال هذا الدرس.

1. التحليل التوفيقي(Combinational analysis)

إن لدراسة المجموعات أهمية كبيرة وضرورية لدراسة الاحتمال. والمجموعة هي تجمع أي عدد من العناصر أو الأشياء. ولحساب أصلي المجموعة أو عدد عناصر المجموعة، نستعين بعناصر التحليل التوفيقي باعتباره أحد طرق العد.

- تمثل المجموعات بحروف لاتينية كبيرة مثل: $A, B, C, ...$
- تمثل عناصر المجموعة بحروف لاتينية صغيرة مثل: $a, b, c, ...$

1.1 القائمة(List)

تعريف:

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها. نسمي قائمة من p عنصر من E، كل متتالية مرتبة من p عنصر مأخوذة بإرجاع من E. عدد القوائم هو: n^p

مثال:

إذا كانت: $E=\{a,b,c\}$، فعدد القوائم المكونة من عنصرين($p=2$) من E هو: $n^p=3^2=9$ وهي:

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$$

2.1 التراتيب(Arrangements)

تعريف:

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها. نسمي ترتيبه من p عنصر من E، كل متتالية مرتبة من p عنصر مأخوذة بدون بإرجاع من E. عدد التراتيب هو: $A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$ حيث أن $p\le n$.

مثال:

يتكون سباق خيول من 18 حصان: عدد التراتيب المكونة من ثلاث خيول الأوائل هو:

$$A_{18}^3=\frac{18!}{(18-3)!}=4896$$

3.1 التباديل(Permutations)

تعريف:

لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها. نسمي تبديله من E، كل ترتيبه مكونة من n عنصر من E. عدد التباديل هو: بما أن $p=n$ فإن: $A_n^n=P_n=\frac{n!}{(n-n)!}=n!$

.

ملاحظة:

إذا كان ضمن n من العناصر n_1 من العنصر متشابهة و n_2 من العناصر متشابهة... n_k من العناصر متشابهة فإن عدد التباديل ذات التكرار هو: $P_n^{n_1,n_2,...,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

مثال:

إذا كانت: $E=\{a,b,c\}$، فعدد التباديل المكونة من ثلاث عناصر $(p=n=3)$ من E هو:
$P_3=3!=6$ و هي:

$$abc, acb, bca, bac, cab, , cba$$

نظرية ستيرلينق(Stirling):
إذا كان n كبير جدا فإن: $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

4.1 التوفيقات(Combinations)

تعريف:
لتكن لدينا المجموعة E والمتكونة من n عنصر مختلفة فيما بينها. نسمي توفيقه من p عنصر من E، كل متتالية غير مرتبة من p عنصر مأخوذة بدون بإرجاع من E. عدد التوافيق هو:
$C_n^p=A_n^p/p!=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ حيث أن $p\le n$.

مثال:
1) إذا كانت: $E=\{a,b,c,d\}$، فعدد التوافيق المكونة من عنصرين $(p=2)$ من E هو:
$C_4^2=\dfrac{4!}{(4-2)!2!}=6$ و هي: ab, ac, ad, bc, bd, cd
2) قسم يتكون من 15 طالبا. بكم طريقة يمكن أن نختار لجنة مؤلفة من 4 طلاب، نستعمل التوفيقات لان السحب بدون إرجاع(لا يمكن أن نختار طالب مرتين في لجنة واحدة) والترتيب غير مهم(إذا كانت تحتوى على الطالب محمد مثلا لا يهم ترتيبه في اللجنة):
$C_{15}^4=\dfrac{15!}{(15-4)!4!}=1365$

خصائص:

- إذا كان $1\le p\le n$ فإن: $C_n^p=C_n^{n-p}$
- مثلث باسكال(Pascal): $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$
- قانون ثنائي الحد لنيوتن(Binôme de Newton)، إذا كان $a,b\in\Re, n\in N$:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$$

2. تمارين مقترحة محلولة

تمرين(1):
تتضمن لوحة ترقيم سيارة حرفيين لاتينيين مختلفين متبوعين بثلاثة أرقام يختلف أولها عن 0.
ما هو عدد اللوحات المختلفة التي يمكن الحصول عليها بهذه الكيفية ؟

الحل:
بالنسبة للحرفين اللاتينيين المختلفين، نستعمل الترتيبه لاختيار الحرفين من بين 26 حرف لاتيني، لأن الحرف لا يتكرر وترتيبه مهم. والرقم الأول نختاره من تسعة أرقام لأنه لا يمكن أن يأخذ الصفر. والرقمين الأخيرين نستعمل القائمة لاختيار الرقمين من بين 10 أرقام لأن ترتيب الرقمين مهم ويمكن أن يتكرر نفس الرقم كما يلي:

$$A_{26}^{2}\times 9^{1}\times 10^{2}=\frac{26!}{(26-2)!}\times 9\times 10^{2}=585000 \text{لوحة ترقيم}$$

تمرين(2):

باستعمال حروف كلمة SCIENCES، بكم طريقة يمكننا أن نشكل كلمات متكونة من 8 حروف(سواء ذات معنى أم لا) في الحالات التالية:

1) باستعمال كل الحروف ؟

2) الكلمات تبدأ وتنتهي بحرف(Consonne) ؟

3) لكلمات تبدأ بحرف(Consonne) وتنتهي بحرف(Voyelle) ؟

الحل:

سنقوم باستعمال التبديلة بتكرار لان كلمة SCIENCES تتشكل من ثلاثة حروف متكررة وهي: S ، C و E.

1) لا يوجد تكرار والترتيب مهم لأن الكلمة تختلف باختلاف ترتيب الحرف سواء ذات معنى أو لا:

$$A_{8}^{8}=P_{8}^{2,2,2}=\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!}=5040 \text{كلمة مختلفة}$$

2) عدد الأحرف(Consonnes) في كلمة SCIENCES هو 5(S C N C S)، إذن، نختار الحرف الأول والأخير بــالترتيبه A_{5}^{2} ، وبقيت 6 حروف في الوسط نختارها بالتبديله !6 يصبح لدينا:

$$A_{8}^{8}=P_{8}^{2,2,2}=\frac{A_{5}^{2}\times 6!}{2!\times 2!\times 2!}=1800 \text{كلمة مختلفة}$$

3) عدد الأحرف(Voyelle) في كلمة SCIENCES هو 3(I E E) ، إذن، نختار الحرف الأول بالترتيبه A_{5}^{1} والأخير بــالترتيبه A_{3}^{1} ، وبقيت 6 حروف في الوسط نختارها بالتبديله !6 يصبح لدينا:

$$A_{8}^{8}=P_{8}^{2,2,2}=\frac{A_{5}^{1}\times A_{3}^{1}\times 6!}{2!\times 2!\times 2!}=1350 \text{كلمة مختلفة}$$

تمرين(3):

يود سكرتير إدارة ما أن يختم رسالة، حيث أن تكلفة الختم تساوي 2.80 DA. علما أن لديه علبة طوابع بريدية تحتوي على 8 طوابع بقيمة 0.20 DA للواحد، 4 طوابع بقيمة 0.10 DA للواحد، طابعين بقيمة 1 DA للواحد وطابع بقيمة 2 DA. بكم طريقة يمكنه أن يختم بها هذه الرسالة ؟

الحل:

سنقوم باستعمال التوفيقات لاختيار طريقة ختم الرسالة لأن السكرتير لا يمكنه أن يستعمل الطابع البريدي مرتين وترتيبه لا يهم بحيث تكون تكلفة الختم لمجموع الطوابع الملصقة هي 2.80 DA.

- الحالة الأولى: يقوم السكرتير بلصق الطابع البريدي بقيمة 2 DA، لدينا:

$$C_{1}^{1}\times C_{8}^{4}\times C_{4}^{0}+C_{1}^{1}\times C_{8}^{3}\times C_{4}^{2}+C_{1}^{1}\times C_{8}^{2}\times C_{4}^{4}=70+336+28=434$$

ونحصل على نفس النتيجة إذا قام بلصق الطابعين البريديين بقيمة 1 DA كما يلي:

$$C_2^2 \times C_8^4 \times C_4^0 + C_2^2 \times C_8^3 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_8^2 \times C_4^4 = 70 + 336 + 28 = 434$$

- الحالة الثانية: يقوم السكرتير بلصق الطابع البريدي بقيمة DA 1، لدينا:

$$C_2^1 \times C_8^8 \times C_4^2 + C_2^1 \times C_8^7 \times C_4^4 = 12 + 16 = 28$$

وبالتالي يمكنه ختم الرسالة بـ $(2 \times 434) + 28 = 896$ طريقة.