1. قانون بايز(Bayes' theorem)

نظرية:

ليكن A و B حدثين عشوائيين، مع $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$. إذن، قانون بايز هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})}$$

أكثر تعميم، إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ تشكل تقسيم لـ Ω، من أجل كل $j\in I$ ، لدينا:

$$P(A_j/B)=\frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i\in I}P(A_j)P(B/A_j)}$$

عادت ما يستعمل قانون باير عندما نريد معرفة سبب وقوع الحدث وخاصة أسباب وقوع حوادث المرور، لأن النتيجة معروفة وهي حادث المرور ونريد معرفة السبب الذي أدى إلى وقوعه.

البرهان:

لدينا: $P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)}{P(B)}$ (نستعمل قانون الاحتمال الشرطي).

كذلك $P(B)$ يساوي إلى: $P(B)=\sum P(A_j)P(B/A_j)$ (نستعمل قانون الاحتمال الكلي). تصبح لدينا العلاقة التالية:

$P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)}{\sum P(B/A_j)P(A_j)}$. وبضرب البسط في $\frac{P(A_j)}{P(A)}$ ، تصبح:

$$P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)\times\frac{P(A_j)}{P(A_j)}}{\sum P(B/A_j)P(A_j)}.$$

نلاحظ في البسط أن: $P(B/A_j)=\frac{P(B\cap A_j)}{P(A_j)}$ ومنه: $P(A_j/B)=\frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum P(B/A_j)P(A_j)}$ وهو قانون بايز.

مثال:

نعود للمثال السابق، نسحب عشوائيا قطعة نقد نحصل على كتابة(P). ما هو احتمال أن تكون من القطعة الثانية والتي تحتوي على كتابتين(2P).

هنا نستعمل قانون بايز لأن النتيجة معروفة ونريد معرفة سبب حدوثها، نحسب احتمال أن تكون القطعة الثانية هي المسحوبة علما أن نتيجة السحب هي كتابة كما يلي:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{1/3\times 2/2}{1/2}=\frac{2}{3}$$

2. الاستقلالية(Independence)

تعاريف:

1) ليكن $(\Omega,\Im,P)$ فضاء الاحتمال، وليكن A و B حدثين عشوائيين. نقول أن A و B حدثين مستقلين إذا كان:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

2) إذا كان لدينا $A_1, A_2, ..., A_n$ n حدث عشوائي، نقول أن هذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى من أجل كل ثنائية (i, j) مع $i \neq j$ لدينا:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

3) هذه الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ مستقلة ككل من أجل كل $k = 1,2,...,n$ لدينا:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times ... P(A_{i_k})$$

أمثلة:

1) لدينا صندوق يحتوي على 3 كريات سوداء و7 كريات بيضاء. نقوم بالسحب مرتين متتاليتين بالإرجاع. من أجل $i = 1,2$ نضع: A_i : الحصول على الكريه السوداء في السحب i.

فإن:

$P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{10}$ و $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3^2}{10^2}$ لأن السحب بالإرجاع. تصبح:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{9}{100}$$

وبالتالي: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$ ومنه فإن A_1 و A_2 مستقلين $(A_1 \amalg A_2)$.

إذا كان السحب بدون إرجاع فإن A_1 و A_2 غير مستقلين. لدينا: $P(A_1) = \frac{3}{10}$

ولحساب $P(A_2)$، نستعمل قانون الاحتمال الكلي:

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{27}{90} = \frac{2}{3}$$

كذلك لحساب $P(A_1 \cap A_2)$، نستعمل قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

وبالتالي: $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \times P(A_2)$ ومنه فإن A_1 و A_2 غير مستقلين.

2) نرمي زهرتي نرد متزنتين. ولتكن الأحداث التالية:

A : زهرة النرد الأولى تعطي عدد زوجي.

B : زهرة النرد الثانية تعطي عدد زوجي.

C : مجموع زهرتي النرد يعطي عدد زوجي.

لدينا:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ ، $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ،

$P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ، $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

وبالتالي كل من A ، B و C مستقلة مثنى مثنى، ولا كنها غير مستقلة ككل لأن:

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$$

ملاحظة:

يجب أن نفرق بين حدثين مانعين وحدثين مستقلين. فإذا كان الحدثين مستقلين فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ أما إذا كانا مانعين فإن: $P(A \cap B) = 0$ لأن $A \cap B = \phi$.

خصائص:

ليكن A و B حدثين عشوائيين مستقلين، مع $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$.

1) لدينا $P(A/B)=P(A)$ و $P(B/A)=P(B)$

2) $\overline{A}$ و B مستقلين، A و $\overline{B}$ مستقلين ، $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلين.

3. تمارين مقترحة محلولة

تمرين(1):

نفترض أن لدينا صنفين من مديري المحافظ(Portfolio managers)، يمثل الصنف الأول مديري المحافظ ذوِي الخبرة في البورصة. أما الصنف الثاني فيمثل مديري المحافظ قليلي الخبرة في البورصة.

إذا قام مدير من الصنف الأول بشراء أسهم لموكله(زبون)، فإن احتمال ارتفاع سعرها هو 80%. وفي حال ما إذا كان مدير من الصنف الثاني، فإن احتمال انخفاض سعرها هو 60%.

يمثل عدد المدراء ذوِي الخبرة في البورصة عشر(1/10) من المدراء الموجودين في البورصة. قام أحد الزبائن باختيار مدير من البورصة وطلب منه أن يشتري له الأسهم.

1) ما هو احتمال ارتفاع سعرها ؟

2) إذا ارتفع سعر الأسهم، ما هو احتمال أن يكون المدير المختار من ذوِي الخبرة ؟

3) قام المدير بشراء أربع أسهم: A_1، A_2، A_3، A_4 للزبون. نفترض استقلالية تغير أسعار الأسهم الأربعة.

- أحسب احتمال ارتفاع سعر كل من A_2، A_4 وانخفاض سعر كل من A_1، A_3.
- أحسب احتمال ارتفاع سعر سهمين فقط.

الحل:

لتكن الأحداث التالية:

I: مدير ذو خبرة. $\overline{I}$: مدير قليل الخبرة. $P(I)=\dfrac{1}{10}\Rightarrow P(\overline{I})=\dfrac{9}{10}$

M: سعر السهم يرتفع. $\overline{M}$: سعر الهم ينخفض. $P(M/I)=\dfrac{9}{10}\Rightarrow P(\overline{M}/\overline{I})=\dfrac{6}{10}$

1) نبحث عن حساب $P(M)$، إذن نستعمل قانون الاحتمال الكلي كما يلي:

$$P(M)=P(I)\times P(M/I)+P(\overline{I})\times P(M/\overline{I})$$

$$P(M)=\frac{1}{10}\times\frac{8}{10}+\frac{9}{10}\times\left(1-\frac{6}{10}\right)=\frac{44}{100}$$

إذن: $\underline{P(M)=0.44}$

2) نبحث عن حساب $P(I/M)$، إذن نستعمل قانون الاحتمال الشرطي كما يلي:

$$P(I/M)=\frac{P(I\cap M)}{P(M)}=\frac{P(I)\times P(M/I)}{P(M)}=\frac{(8/10)\times(1/10)}{0.44}$$

إذن: $\underline{P(I/M)=0.18}$

3) من أجل $i=\overline{1,4}$ ، ليكن الحدث M_i: السهم A_i يرتفع.

- نبحث عن الاحتمال $P(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4)$ كما يلي:

$$P(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4)=P(\overline{M_1})\times P(M_2)\times P(\overline{M_3})\times P(M_4)$$

$$P(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4)=(1-0.44)\times 0.44\times(1-0.44)\times 0.44$$

$$P(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4)=(0.56)^2\times(0.44)^2$$

إذن: $P\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4\right)=0.061$

- عدد مرات اختيار ارتفاع سعر سهمين فقط من بين 4 أسهم هو توفيقه $C_4^2=6$ وبالتالي نبحث عن الاحتمال $C_4^2\times P\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4\right)$ كما يلي:

$$C_4^2\times P\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap M_4\right)=6\times 0.061=0.36$$

تمرين(2):

أرادت شركة(Mercedes) وشركة(Benz) أن تندمجا تحت اسم شركة واحدة(Mercedes-Benz). عدد أعضاء مجلس إدارة شركة(Mercedes) هو ثلاثة أضعاف 3/4 عدد أعضاء مجلس إدارة شركة(Benz). بعد استجواب كل أعضاء مجلسي إدارة الشركتين حول هذا المشروع، كانت النتائج التالية:

	مع الاندماج	ضد الاندماج	بدون رأي
أعضاء مجلس شركة(Mercedes)	%60	%16	%24
أعضاء مجلس شركة(Benz)	%12	%68	%20

اختير عضو من أعضاء مجلسي إدارة الشركتين وطلب منه إبداء رأيه حول هذا المشروع.

1) ما هو احتمال أن يكون بدون رأي ؟

2) إذا كان مع لاندماج، ما هو احتمال أن يكون من أعضاء مجلس شركة(Mercedes) ؟

3) إذا كان ضد الاندماج، ما هو احتمال أن يكون من أعضاء مجلس شركة(Benz) ؟

الحل:

لتكن الأحداث التالية:

M: العضو ينتمي إلى شركة Mercedes . B: العضو ينتمي إلى شركة Benz .

A: العضو بدون رأي. C: العضو مع الاندماج. D: العضو ضد الاندماج.

$$P(M)=\frac{3}{4}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}$$

1) نبحث عن حساب $P(A)$ ، إذن نستعمل قانون الاحتمال الكلي كما يلي:

$$P(A)=P(M)\times P(A/M)+P(B)\times P(A/B)$$

$$P(A)=\frac{3}{4}\times 0.24+\frac{1}{4}\times 0.2$$

إذن: $P(A)=0.23$

2) نبحث عن حساب $P(M/C)$ ، إذن نستعمل قانون بايز لأن النتيجة معروفة وهي أن العضو مع الاندماج ونبحث عن احتمال أن ينتمي العضو إلى شركة Mercedes والذي يمثل السبب في قانون بايز كما يلي:

$$P(M/C)=\frac{P(M)\times P(C/M)}{P(M)\times P(C/M)+P(B)\times P(C/B)}$$

$$P(M/C)=\frac{(3/4)\times 0.6}{(3/4)\times 0.6+(1/4)\times 0.12}$$

$$P(M/C)=0.93$$

3) بنفس طريقة حل السؤال الثاني، نبحث عن حساب $P(B/D)$ كما يلي:

$$P(B/D)=\frac{P(B)\times P(D/B)}{P(B)\times P(D/B)+P(M)\times P(D/M)}$$

$$P(B/D)=\frac{(1/4)\times 0.68}{(1/4)\times 0.68+(3/4)\times 0.16}$$

إذن: $\underline{P(B/D)=0.58}$

تمرين(3):

توزع شركة تأمينات زبائنها إلى ثلاث فئات: فئة منخفضي المخاطر، فئة متوسطي المخاطر و فئة مرتفعي المخاطر. دلت إحصائيات هذه الشركة إلى أن احتمال أن يتورط شخص من زبائنها في حادث خلال السنة هو على التوالي 0.05، 0.15، 0.30. قدرت الشركة أن 20% من الزبائن منخفضي المخاطر، 50% من الزبائن متوسطي المخاطر و30% من الزبائن مرتفعي المخاطر.

1) ما هي نسبة الزبائن الذين لديهم حادث أو أكثر خلال سنة معينة ؟

2) إذا كان لدينا زبون لم يقم بحادث في السنة الماضية، ما هو احتمال أن يكون من فئة الزبائن منخفضي المخاطر ؟

الحل:

لتكن الأحداث التالية:

A : لديه حادث أو أكثر.

B_1 : فئة منخفضي المخاطر. B_2 : فئة متوسطي المخاطر. B_3 : فئة مرتفعي المخاطر.

1) نبحث عن حساب $P(A)$ ، إذن نستعمل قانون الاحتمال الكلي كما يلي:

$$P(A)=P(B_1)\times P(A/B_1)+P(B_2)\times P(A/B_2)+P(B_3)\times P(A/B_3)$$

$$P(A)=0.2\times 0.05+0.5\times 0.15+0.3\times 0.3$$

إذن: $\underline{P(A)=0.175}$

2) نبحث عن حساب $P(B_1/\overline{A})$ ، إذن نستعمل قانون بايز لأن النتيجة معروفة وهي أن الزبون لم يكن لديه حادث السنة الماضية ونبحث عن احتمال أن ينتمي إلى فئة منخفضي المخاطر والذي يمثل السبب في قانون بايز كما يلي:

$$P(B_1/\overline{A})=\frac{P(B_1)\times P(\overline{A}/B_1)}{P(\overline{A})}$$

لتسهيل الحساب نقوم بحساب $P(\overline{A})$ باستعمال الاحتمال العكسي $P(A)$ كما يلي:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$P(\overline{A})=1-0.175$$

$$\underline{P(\overline{A})=0.825}$$

ومنه:

$$P(B_1/\overline{A})=\frac{P(B_1)\times P(\overline{A}/B_1)}{P(\overline{A})}$$

$$P(B_1/\overline{A})=\frac{P(B_1)\times [1-P(A/B_1)]}{P(\overline{A})}$$

$$P(B_1/\overline{A})=\frac{0.2\times [1-0.05]}{0.825}$$

إذن: $\underline{P\left(B_1/\overline{A}\right)=0.23}$