Chapitre II. Intégration numérique

II.1 Introduction

L'intégration numérique est le calcul par des méthodes numériques l'intégrale :

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \tag{II-1}$$

où $f(x)$ est une fonction connue seulement en quelques points ou encore une fonction n'ayant pas de primitive.

D'après l'approche de l'interpolation polynomiale, toute fonction $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \tag{II-2}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme d'interpolation de degré n, sa formule générale est donnée par :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + +a_3x^3 + \cdots + +a_nx^n \quad (a_n \neq 0) \tag{II-3}$$

$E_n(x)$ est l'erreur d'interpolation d'ordre $(n+1)$ définie par :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \tag{II-4}$$

où $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont les points d'interpolation et $\xi \in [x_0, x_n]$.

En effet, l'intégration numérique est basée principalement sur la relation :

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx \tag{II-5}$$

En faisant varier la valeur de *n*, on obtient les *formules de Newton-Cotes*. La précision sur la valeur de l'intégrale dépend alors de la valeur de n, en effet plus *n* est grande plus la précision est élevée.

Dans ce chapitre nous allons présenter deux méthodes numériques : la *méthode de trapèzes* et la *méthode de Simpson*.

II.2 Méthode de trapèzes

II.2.1 Formule de la méthode de trapèzes

Considérons que la fonction $f(x)$ est connue seulement en deux points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$, elle peut être alors écrit par :

$$f(x) = P_1(x) + E_1(x) \tag{II-6}$$

où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 qui est représenté par une droite, $E_1(x)$ est l'erreur d'interpolation d'ordre 2.

On peut approximativement écrire :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx \tag{II-7}$$

Graphiquement $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire délimité par les axes $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe de $f(x)$, alors que $\int_a^b P_1(x)dx$ est l'aire délimité par les mêmes axes et la courbe de la droite $P_1(x)$, qui a la forme d'un trapèze (voir Figure II.1).

On utilise le polynôme de Newton de degré 1 définie par :

$$p_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = f(a) \quad , \quad \alpha_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \tag{II-8}$$

Il vient alors :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b [\alpha_0 + \alpha_1(x-a)]dx \qquad \text{(II-9)}$$

Par un calcul on déduit que :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\big(f(a)+f(b)\big) \text{ avec } h = b-a \qquad \text{(II-10)}$$

Remarquons que le résultat de cette intégrale est bien une surface d'un trapèze.

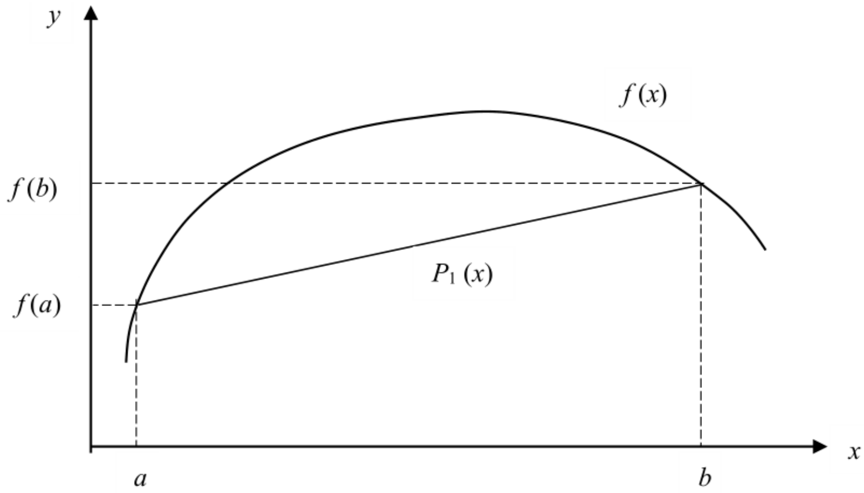

Figure II.1 : Illustration graphique d'une intégrale approximée par un seul trapèze

Pour augmenter la précision de cette approximation on divise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur h, et on calcul la somme de toutes les intégrales correspondent aux sous-intervalles. On note les abscisses obtenues par : x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_l , x_{l+1} , ... , x_n où $a = x_0$ et $b = x_n$. Cette nouvelle approximation est illustrée sur la Figure II.2. Il vient alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{l=0}^{n-1}\int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x)dx \approx \sum_{l=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_l)+f(x_{l+1})] \qquad \text{(II-11)}$$

Après un calcul on déduit la formule de la méthode de Trapèzes suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right) \qquad \text{(II-12)}$$

avec : $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $i = 0,1,2,\dots,n$

Graphiquement, on remarque que plus le nombre n de sous-intervalles est grande, plus la précision sur la valeur approchée de l'intégrale est grande.

II.2.2 Erreur commise à la méthode de trapèzes

Evaluons maintenant l'erreur commise à la méthode de trapèzes. D'après la relation (II-6) on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_1(x)dx + \int_a^b E_1(x)dx \qquad \text{(II-13)}$$

En utilisant la définition (II-4) le terme de l'erreur s'écrit :

$$\int_a^b E_1(x)dx = \int_a^b \frac{f''\big(\xi(x)\big)}{2!}(x-a)(x-b)dx \qquad \text{(II-14)}$$

On considère le changement de variable :

$$(s-i) = \frac{(x-x_i)}{h} \qquad \text{(II-15)}$$

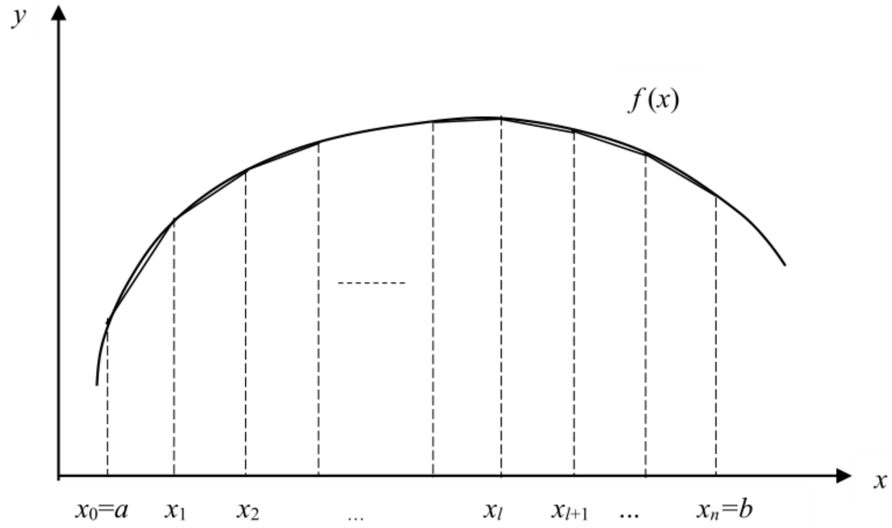

Figure II.2 : Illustration graphique d'une intégrale approximée par plusieurs trapèzes

alors :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \quad , \qquad s = \frac{(x-a)}{h} \quad , \qquad (s-1) = \frac{(x-b)}{h} \tag{II-16}$$

d'où :

$$\int_a^b E_1(x)dx = \int_0^1 \frac{f''\big(\xi(s)\big)}{2!} s(s-1)h^3 ds \tag{II-17}$$

On peut encore simplifier cette expression en faisant appel au théorème de la moyenne suivant :

Théorème

Soit $f_1(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $[a\,,b]$ et $f_2(x)$ une fonction intégrable qui ne change pas de signe dans l'intervalle $[a\,,b]$. Il existe alors $\eta \in [a\,,b]$ tel que :

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = f_1(\eta)\int_a^b f_2(x)dx \tag{II-18}$$

Il vient alors :

$$\int_a^b E_1(x)dx = \frac{f''(\eta)}{2!}h^3 \int_0^1 s(s-1)ds \tag{II-19}$$

Le terme d'erreur sera donc :

$$\int_a^b E_1(x)dx = -\frac{f''(\eta)}{12}h^3 \quad \text{pour} \quad \eta \in [a,b] \tag{II-20}$$

Cette erreur concerne un seul intervalle $[a,b]$. Donc l'erreur qui concerne n sous-intervalles considérés dans l'intervalle $[a,b]$ est obtenue par sommation, soit :

$$\int_a^b E_1(x)dx = n\left(-\frac{f''(\eta)}{12}h^3\right) = -(b-a)\frac{f''(\eta)}{12}h^2 \tag{II-21}$$

On déduit finalement que l'erreur commise à la méthode de trapèzes est majorée :

$$\left|I_{trapèzes}(f) - I_{exacte}(f)\right| = \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \tag{II-22}$$

avec :

$$M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$$

Etant donnée la précision ε on peut alors déterminer le nombre minimal n des sous-intervalles par :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}M_2} \tag{II-23}$$

II.2.3 Exercice II.1

Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^5 e^{\sin(x)} dx \tag{II-24}$$

1) Calculer une valeur approchée de I par la méthode des Trapèzes, en prenant $n = 3$ puis $n = 5$.
2) Donner une majoration de l'erreur commise à la méthode de Trapèzes pour $n = 3$ et $n = 5$. Conclure.
3) Calculer le nombre de sous-intervalles n qui permet d'avoir des valeurs approchées à des précisions de 10^{-2} , 10^{-3} et 10^{-4} en utilisant la méthode des trapèzes. Conclure.

II.2.4 Corrigé d'exercice II.1

1) On utilise la formule de trapèzes donnée par (II-12) :
On a : $f(x) = e^{\sin(x)}$, $a = 0$, $b = 5$
Pour $n = 3$; $h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5}{3}$, alors :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{5}{3}$	$x_2 = \frac{10}{3}$	$x_3 = 5$
$f(x_i)$	1	2.7058	0.8265	0.3833

Donc :

$$I_{trap} \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_3) + 2[f(x_1) + f(x_2)]) = 7.0400$$

Pour $n = 5$; $h = \frac{(b-a)}{n} = 1$, alors :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$
$f(x_i)$	1	2.3198	2.4826	1.1516	0.4692	0.3833

Donc :

$$I_{trap} \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_5) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]) = 7.1147$$

2) On utilise l'inégalité (II-22) :
On a :

$$f''(x) = (\cos^2(x) - \sin(x))e^{\sin(x)} \quad \text{alors} \quad M_2 = \max_{[0\ ,\ 5]} |f''(x)| = e$$

Donc :

$$\text{pour } n = 3 \ ; \ \left|I_{trap} - I_{ext}\right| \leq 3.1461$$
$$\text{pour } n = 5 \ ; \ \left|I_{trap} - I_{ext}\right| \leq 1.1326$$

On constate que l'erreur a diminuée lorsque n a augmenté.
3) On utilise l'inégalité (II-23) :

$$\text{pour } \varepsilon = 0.01 \ ; \ n \geq \sqrt{\frac{e(5-0)^3}{12 \times 0.01}} = 53.2 \ \text{ soit } n = 54$$

$$\text{pour } \varepsilon = 0.001 \ ; \ n \geq \sqrt{\frac{e(5-0)^3}{12 \times 0.001}} = 168.2 \ \text{ soit } n = 169$$

$$\text{pour } \varepsilon = 0.0001 \ ; \ n \geq \sqrt{\frac{e(5-0)^3}{12 \times 0.0001}} = 532.1 \ \text{ soit } n = 533$$

On constate que plus la précision souhaitée ε est élevée, plus le nombre de sous-intervalles nécessaire n est grand.

II.2.5 Travail pratique II.1 : Implémentation MATLAB de la méthode des trapèzes

1) En utilisant l'algorithme de la méthode des trapèzes, écrire un programme Matlab qui permet de calculer l'intégrale (II-24) en utilisant la méthode de trapèzes pour $n = 5$.
2) Exécuter ce programme pour $n = 20\,,40\,,80\,,200$ et donner les valeurs approchées de (II-24). Conclure.
3) Matlab dispose d'une commande prédéfinie permettant le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle $[a\,,b]$ par la méthode des trapèzes, sa syntaxe est :

$$\mathrm{I} = \mathrm{trapz}(x, f)$$

où x est un vecteur ligne dont les valeurs sont comprises entre a et b avec un pas h.
En utilisant cette commande calculer une valeur approchée de (II-24).

II.2.6 Corrigé de travail pratique II.1

1) Le programme MATLAB de la méthode des trapèzes :

```
clear all;close all;clc
a=0;
b=5;
n=5;
h=(b-a)/n;
f=@(x)exp(sin(x));
s=0;
for i=1:n-1
s=s+f(a+i*h);
end
I=(h/2)*(f(a)+f(b))+h*s
```

Après exécution du programme on obtient : n=10 ; I= 7.1705

2) En utilisant le programme réalisé, on obtient :

n	5	10	20	40	80	200	500
I	7.1147	7.1705	7.1845	7.1880	7.1888	7.1891	7.1891

On conclut que la valeur approchée de l'intégrale converge vers la valeur $I = 7.1891$ lorsque n augmente plus en plus.

3) On utilise la fonction prédéfinie de la méthode de trapèzes :

```
a=0;
b=5;
n=5
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=exp(sin(x));
I=trapz(x,y)
```

Après exécution on trouve les mêmes résultats précédents :

n	5	10	20	40	80	200	500
I	7.1147	7.1705	7.1845	7.1880	7.1888	7.1891	7.1891

On remarque que cette commande donne les mêmes résultats obtenus par le programme précédent.

II.3 Méthode de Simpson

II.3.1 Formule de la méthode de Simpson

Reprenons le raisonnement utilisé dans la méthode des trapèzes, mais cette fois en utilisant un polynôme de degré 2. Considérons maintenant que la fonction $f(x)$ est connue seulement en trois points $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ et $(b, f(b))$ où les abscisses a, c et b sont également distancées, elle peut être alors écrit par :

$$f(x) = P_2(x) + E_2(x) \tag{II-25}$$

où $P_2(x)$ est un polynôme de degré 2 qui est représenté par un parabole, $E_2(x)$ est l'erreur d'interpolation d'ordre 3.

On peut approximativement écrire :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx \tag{II-26}$$

Graphiquement $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire délimité par les axes $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe de $f(x)$, alors que $\int_a^b p_2(x)dx$ est l'aire délimité par les mêmes axes et la courbe parabolique de $P_2(x)$.

On utilise le polynôme de Newton de degré 2 définie par :

$$p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)(x-c) \tag{II-27}$$

avec $$\alpha_0 = f(a)\,, \alpha_1 = \frac{f(c)-f(a)}{h}\,, \alpha_2 = \frac{f(b)-2f(c)+f(a)}{2h^2}$$

Il vient alors :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b [\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)(x-c)]dx \tag{II-28}$$

On déduit alors :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(c) + f(b)\big) \text{ avec } h = b - c = c - a = \frac{b-a}{2} \tag{II-29}$$

Pour augmenter la précision de cette approximation on divise l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles de même longueur h, et on calcul la somme de toutes les intégrales correspondent aux sous-intervalles. On note les abscisses obtenues par : x_0 , x_1 , x_2 , … , x_{2l} , x_{2l+1} , x_{2l+2} , … , x_{2n} où $a = x_0$ et $b = x_{2n}$. Il vient alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{l=0}^{n-1} \int_{x_{2l}}^{x_{2l+2}} f(x)dx \simeq \sum_{l=0}^{n-1} \frac{h}{3}[f(x_{2l}) + 4f(x_{2l+1}) + f(x_{2l+2})] \tag{II-30}$$

On déduit la formule de la méthode de Simpson suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big(f(a) + f(b) + 2[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})] + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})]\big) \tag{II-31}$$

avec : $$h = \frac{b-a}{2n}\ , \qquad x_i = a + ih\,, x_0 = a\,, x_{2n} = b\,, i = 0,1,2, \dots ,2n-1,2n$$

Plus la valeur de sous-intervalles $2n$ est grande, plus la précision sur la valeur approchée de l'intégrale est grande.

Remarque

On peut poursuivre dans la même voie et développer des *formules de Newton-Cotes* basées sur des polynômes de degré de plus en plus élevé.

II.3.2 Erreur commise à la méthode de Simpson

A partir la relation (II-25) on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_2(x)dx + \int_a^b E_2(x)dx \qquad \text{(II-32)}$$

Le calcul du terme de l'erreur dans cette expression se fait par :

- l'utilisation de la définition (II-4).
- L'introduction d'un quatrième point quelconque et définir le polynôme de degré 3 correspondant. On va montrer que cette astuce n'a pas d'influence sur la précision du résultat.

Le polynôme de Newton de degré 3 passant par les trois points précédents plus un quatrième point quelconque $\big(d, f(d)\big)$ peut s'écrire :

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{\big(f(d) - p_2(d)\big)}{(d-a)(d-c)(d-b)}(x-a)(x-c)(x-b) \qquad \text{(II-33)}$$

où $p_2(x)$ est le polynôme de Newton de degré 2 donné par (II-27).

En utilisant le changement de variable (II-15) et sachant que $h = b - c = c - a = \frac{b-a}{2}$, on peut vérifier que :

$$\int_a^b (x-a)(x-c)(x-b)dx = \int_0^2 s(s-1)(s-2)h^4 ds = 0 \qquad \text{(II-34)}$$

Donc :

$$\int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b p_3(x)dx \qquad \text{(II-35)}$$

En utilisant un polynôme de degré 2, on obtient en fait la même précision qu'avec un polynôme de degré 3.

Le terme d'erreur est donc de ce fait :

$$\int_a^b E_2(x)dx = \int_a^b E_3(x)dx = \int_a^b \frac{f''''(\xi)}{4!}(x-a)(x-c)(x-b)(x-d)dx \qquad \text{(II-36)}$$

Il n'est pas possible à ce stade-ci d'appliquer le théorème de la moyenne donné au paragraphe (II.2.2), comme nous l'avons fait pour la méthode du trapèze. En effet, la fonction $(x-a)(x-c)(x-b)(x-d)$ peut changer de signe dans l'intervalle $[a, b]$, à moins de choisir judicieusement d. Comme le choix de d est arbitraire, on peut poser $d = b$. Le terme d'erreur devient alors :

$$\int_{x_0}^{x_2} E_3(x)dx = \int_a^b \frac{f''''(\xi)}{4!}(x-a)(x-c)(x-b)(x-b)dx \qquad \text{(II-37)}$$

$$= \int_0^2 \frac{f''''(\xi)}{4!} s(s-1)^2(s-2)h^5 ds$$

On remarque que la fonction $s(s-1)^2(s-2)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $[0\,,2]$. On peut maintenant se servir du théorème de la moyenne, on obtient alors :

$$\int_a^b E_2(x)dx = \frac{f''''(\xi)}{4!}h^5 \int_0^2 s(s-1)^2(s-2)ds = -\frac{f''''(\eta)}{90}h^5 \qquad \text{(II-38)}$$

où

$$\eta \in [a, b]$$

Cette erreur concerne 2 sous-intervalle égaux dans l'intervalle $[a, b]$. L'erreur qui concerne $2n$ est obtenue par sommation, soit donc :

$$\int_a^b E_2(x)dx = n\left(-\frac{f''''(\eta)}{90}h^5\right) = -\frac{(b-a)}{180}f''''(\eta)h^4 \qquad \text{(II-39)}$$

On déduit finalement que l'erreur commise à la méthode de Simpson est majorée :

$$\left|I_{Simpson}(f) - I_{exacte}(f)\right| = \left|-\frac{h^5(b-a)}{180n^4} f^{(4)}(\eta)\right| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4} \qquad \text{(II-40)}$$

où

$$\eta \in [a,b] \text{ et } M_4 = \max_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

Etant donnée la précision ε on peut alors déterminer le nombre minimal n des sous-intervalles par :

$$n \geq \sqrt[4]{M_4 \frac{(b-a)^5}{180\varepsilon}} \quad ; \text{ où } n \text{ est pair} \qquad \text{(II-41)}$$

II.3.3 Exercice II.2

1) Calculer une valeur approchée de l'intégrale (II-24) par la méthode de Simpson, en prenant $n' = 4$ et $n' = 6$ avec $n' = 2n$.
2) Donner une majoration de l'erreur commise à la méthode de Simpson pour $n' = 4$ et $n' = 6$.
3) Calculer le nombre de sous-intervalles n qui permet d'avoir les précisions 10^{-2} , 10^{-3} et 10^{-4} en utilisant la méthode de Simpson. Conclure.
4) Comparer entre les méthodes de Simpson et trapèzes (voir les résultats obtenus dans l'exercice II.1).

II.3.4 Corrigé d'exercice II.2

1) On utilise la formule de Simpson donnée par (II-31) :
On a : $f(x) = e^{\sin(x)}$, $a = 0$, $b = 5$
Pour la méthode de Simpson, le nombre de segments n' doit être pair, c'est la raison pour laquelle on a pris $n' = 2n = 4$, 6 et non pas $n' = 3$, 5 comme pour le cas de la méthode des trapèzes.
Pour $n' = 4$; $h = \frac{(b-a)}{n'} = \frac{5}{4}$, alors :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{5}{4}$	$x_2 = \frac{5}{2}$	$x_3 = \frac{15}{4}$	$x_4 = 5$
$f(x_i)$	1	2.5831	1.8193	0.5646	0.3833

Donc :

$$I_{Simp} \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_4) + 2[f(x_2)] + 4[f(x_1) + f(x_3)]) = 7.3745$$

Pour $n' = 6$; $h = \frac{(b-a)}{n'} = \frac{5}{6}$, alors :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{5}{6}$	$x_2 = \frac{5}{3}$	$x_3 = \frac{5}{2}$	$x_4 = \frac{10}{3}$	$x_5 = \frac{25}{6}$	$x_6 = 5$
$f(x_i)$	1	2.0963	2.7058	1.8193	0.8265	0.4254	0.3833

Donc :

$$I_{Simp} \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_6) + 2[f(x_2) + f(x_4)] + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)]) = 7.1700$$

2) On utilise l'inégalité (II-40) :
On a : $f^{(4)}(x) = [\sin^4(x) + 6\sin^3(x) + 5\sin^2(x) - 5\sin(x) - 3]e^{\sin(x)}$
Alors : $M_4 = \max_{[0\ ,\ 5]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 4e$
Donc :

$$\text{pour } n = 4 \ ; \ \left|I_{ext} - I_{Simp}\right| \leq 0.7374$$
$$\text{pour } n = 6 \ ; \ \left|I_{ext} - I_{Simp}\right| \leq 0.1456$$

On constate que l'erreur a diminuée lorsque n est augmenté.

3) On utilise l'inégalité (II-41) :

$$\text{pour } \varepsilon = 0.01 \; ; \; n \geq \sqrt[4]{\frac{4e(5-0)^5}{180 \times 0.01}} = 11.75 \; \text{ soit } n = 12$$

$$\text{pour } \varepsilon = 0.001 \; ; \; n \geq \sqrt[4]{\frac{4e(5-0)^5}{180 \times 0.001}} = 20.84 \; \text{ soit } n = 22$$

$$\text{pour } \varepsilon = 0.0001 \; ; \; n \geq \sqrt[4]{\frac{4e(5-0)^5}{180 \times 0.0001}} = 37.07 \; \text{ soit } n = 38$$

On constate que plus la précision souhaitée ε est élevée, plus le nombre de sous-intervalles nécessaire n est grand.

4) On constate que la méthode de Simpson est plus précise et plus rapide comparée à la méthode de trapèzes.

II.3.5 Travail pratique II.2 : Implémentation MATLAB de la méthode de Simpson

1) Ecrire un algorithme de calcul pour la méthode de Simpson.

2) En utilisant l'algorithme de la méthode de Simpson, écrire un programme Matlab qui permet de calculer l'intégrale (II-24) en utilisant la méthode de Simpson pour $n = 6$.

3) Exécuter ce programme pour $n = 20 , 40 , 80 , 200$ et donner les valeurs approchées l'intégrale (II-24). Conclure.

4) Matlab dispose d'une commande prédéfinie permettant le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle $[a , b]$ par la méthode de Simpson, sa syntaxe est :

$$\text{quad}(f, a, b)$$

En utilisant cette commande calculer une valeur approchée de I.

II.3.6 Corrigé de travail pratique II.2

1) le programme MATLAB de la méthode de Simpson :

```
clear all;close all;clc;
% n doit etre pair
a=0;
b=5;
n=10
h=(b-a)/n;
f=@ (x)exp(sin(x));
s1=0;
for i=1:2:n-1
s1=s1+f(a+i*h);
end
s2=0;
for i=2:2:n-2
s2=s2+f(a+i*h);
end
I=(h/3)*(f(a)+f(b)+4*s1+2*s2)
```

Après exécution on obtient : $n = 10 , I = 7.3387$

2) On change la valeur n on obtient :

n	4	10	20	40	80	200	500
I	7.3387	7.1891	7.1891	7.1891	7.1891	7.1891	7.1891

On conclut que la valeur approchée de l'intégrale converge vers la valeur $I = 7.1891$ lorsque n augmente plus en plus. De plus, la convergence de la méthode de Simpson est rapide comparée à la convergence de la méthode de trapèzes.

3) On utilise la fonction prédéfinie de la méthode de Simpson :

```
>> I=quad(@(x)exp(sin(x)),0,5)
```

Après exécution on trouve : $I = 7.1891$