# Chapitre III. Résolution numérique des équations non-linéaires

## III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier des méthodes de résolution numérique des équations non linéaires de la forme :

$$f(x) = 0 \tag{III-1}$$

***Rappels***

• On appel une *racine* ou un *zéro* de la fonction $f(x)$ toute valeur réelle $r$ tel que $f(r) = 0$.

• Une fonction $f(x)$ peut avoir une racine, plusieurs racines ou bien aucune racine. Le théorème des valeurs intermédiaires présente une condition principale d'existence des racines dans un intervalle $[a, b]$.

- ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Si $f(x)$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins une valeur $r$ tel que $f(r) = 0$.

Si de plus $f(x)$ est strictement monotone sur $[a, b]$, la racine est unique dans $[a, b]$.

• La résolution de l'équation (III-1) se fait alors par le calcul des racines, si elles existent, de la fonction $f(x)$.

Dans le présent chapitre deux méthodes numériques seront étudiées : la *méthode de dichotomie* et la *méthode Newton*.

## III.2 Méthode de dichotomie (ou bissection)

La méthode de dichotomie se base la réduction multiple et successive de l'intervalle qui contient la racine jusqu'à atteindre la valeur de la racine à une précision $\varepsilon$. Le mot dichotomie (dicho = deux, tomie = coupe) exprime clairement le principe de la méthode.

Pour bien expliquer cette méthode supposons qu'une fonction $f(x)$ possède une seule racine $r$ dans un intervalle $[a, b]$, alors $f(a) \times f(b) < 0$.

On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux, on obtient donc deux sous-intervalles égaux $[a, c]$ et $[c, b]$ où $c$ est le milieu de $[a, b]$ c'est-à-dire : $c = (b + a)/2$. L'un des deux sous-intervalles contient surement la racine. On divise en deux de nouveau ce dernier. On répète cette procédé plusieurs fois successives jusqu'à satisfaire la condition de convergence pour la racine.

### III.2.1 Critère de Convergence

La racine recherchée est soit dans l'intervalle $[a, c]$ ou dans l'intervalle $[c, b]$, qui sont tous deux de longueur :

$$\frac{|b - a|}{2} \tag{III-2}$$

Ce qui constitue une borne supérieure de l'erreur absolue. En divisant par $c$, on obtient une approximation assez fiable de l'erreur relative :

$$\frac{|b - a|}{2|c|} \tag{III-3}$$

La racine à une précision $\varepsilon$ est alors obtenue lorsque la satisfaction de la condition de convergence suivante :

$$\frac{|b - a|}{2|c|} \leq \varepsilon \tag{III-4}$$

### III.2.2 Nombre d'itérations nécessaires

On remarque aisément que la longueur de l'intervalle entourant la racine est divisée par deux à chaque itération. Cette constatation permet de déterminer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une certaine erreur absolue $\Delta r$ sur la racine $r$. Soit $L = b - a$ la longueur de l'intervalle de départ. Après une itération, le nouvel intervalle est de longueur $L/2$ et après $n$ itérations la longueur de l'intervalle est :

$$\frac{L}{2^n} \tag{III-5}$$

Si on veut connaître la valeur de $n$ nécessaire pour avoir :

$$\frac{L}{2^n} < \Delta r \tag{III-6}$$

Il suffit de résoudre cette équation en fonction de $n$ et on trouve la condition :

$$n > \frac{\ln\left(\frac{L}{\Delta r}\right)}{\ln 2} \tag{III-7}$$

Il est clair que, sur le plan pratique, on doit prendre pour valeur de $n$ le plus petit entier vérifiant cette condition.

### III.2.3 Algorithme de la méthode de dichotomie

On pratique le calcul par la méthode de dichotomie suit l'algorithme suivant :

1. Donner une fonction $f(x)$, un intervalle $[a, b]$ pour lequel $f(x)$ possède un changement de signe, une précision $\varepsilon$, la condition de convergence, et un nombre maximal d'itérations $N$.
2. Calculer : $\mathrm{c} = \frac{a+b}{2}$
3. Si $\frac{|b-a|}{2|c|} \leq \varepsilon$ ; convergence atteinte, écrire la racine $c$, écrire $f(c)$ et arrêter le calcul.
4. Si $\frac{|b-a|}{2|c|} > \varepsilon$ ; on a trois cas possibles :
   a) Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors $b = c$
   b) Si $f(c) \times f(b) < 0$, alors $a = c$
   c) Si le nombre maximale d'itération $N$ est atteint ; « convergence non atteinte en $N$ itérations », arrêter le calcul.
5. Retour à l'étape 2.

***Remarques***

• Dans l'algorithme précédent, il faut prendre garde au cas où la racine recherchée est 0. Il y a alors risque de division par 0 au cours de l'évaluation de l'erreur relative. Ce cas est toutefois rare en pratique.

• Il est parfois utile d'introduire un test d'arrêt sur la valeur de $f(x)$, qui doit tendre également vers 0.

### III.2.4 Exercice III.1

On vaut résoudre numériquement l'équation :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)} = 0 \tag{III-8}$$

1) Vérifier l'existence d'une solution dans les intervalles suivants : [1.5 , 2], [5 , 6].
2) Calculer une valeur approchée à une précision $\varepsilon = 10^{-1}$ de la solution existant dans l'intervalle [1.5 , 2] en utilisant la méthode de dichotomie.
3) Calculer le nombre des itérations nécessaires pour obtenir une solution à une précision $\varepsilon = 10^{-6}$ dans l'intervalle [1.5 , 2].

### III.2.5 Corrigé d'exercice III.1

1) On utilise le théorème des valeurs intermédiaires :
$f(1.5) \times f(2) = -0.0018 < 0$ ; donc il existe une racine dans cet intervalle.
$f(5) \times f(6) = 0.00028312 > 0$ ; donc il n'existe pas une racine dans cet intervalle.
2) On utilise l'algorithme de la méthode de dichotomie :
Itération 1 : l'intervalle $[1.5\,, 2]$ contient la racine α
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$
$f(1.5) \times f(1.75) = -9.54 \times 10^{-4} < 0$
$f(1.75) \times f(2) = 3.65 \times 10^{-3} > 0$
Itération 2 : l'intervalle $[1.5\,, 1.75]$ contient la racine α
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$
$f(1.5) \times f(1.625) = -3.23 \times 10^{-4} < 0$
$f(1.625) \times f(1.75) = 6.52 \times 10^{-4} > 0$
Itération 3 : l'intervalle $[1.5\,, 1.625]$ contient la racine α
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+1.625}{2} = \mathbf{1.5}625$
$f(1.5) \times f(1.5625) = 5.24 \times 10^{-5} > 0$
$f(1.5625) \times f(1.625) = 3.58 \times 10^{-5} < 0$
Itération 4 : l'intervalle $[1.5625\,, 1.625]$ contient la racine α
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5625+1.625}{2} = \mathbf{1.5}9375$

A partir de l'itération 4, un chiffre après la virgule devient constant, donc la racine à une précision de $10^{-1}$ est : $\alpha \simeq c \simeq 1.5$
3) On utilise l'inégalité (III-4) :

$$n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2-1{,}5}{10^{-6}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n > 18{,}93 \quad \text{donc} \quad n = 19$$

### III.2.6 Travail pratique III.1 : Implémentation MATLAB de la méthode de dichotomie

1) Ecrire un programme MATLAB qui permet de tracer la courbe de la fonction $f(x)$ donnée par (III-8) dans l'intervalle $[1\,, 6]$.
2) Déterminer des intervalles comportant les racines.
3) Matlab dispose d'une commande prédéfinie permettant le calcul du zéro (noté $c$) d'une fonction $f(x)$ existant dans un intervalle $[a, b]$. Sa syntaxe est :

$$c = \text{fzero}(f, [a, b])\ .$$

En appliquant cette commande donner une valeur approchée de la racine existant dans $[1.5\,, 2]$ de la fonction (III-8).
4) En appliquant l'algorithme de la méthode de dichotomie, écrire un programme Matlab qui permet de calculer une valeur approchée de la racine existant dans l'intervalle $[1.5\,, 2]$, à la précision $\varepsilon = 10^{-2}$ de la fonction (III-8) par la méthode de dichotomie.
5) Exécuter ce programme pour les précisions $\varepsilon = 10^{-5}\,, 10^{-7}\,, 10^{-9}$ et donner le nombre des itérations effectuées pour chaque précision. Conclure.

### III.2.7 Corrigé de travail pratique III.1

1) Tracé par MATLAB la courbe de $f(x)$ :

```
clear all;close all;clc;
a=1;b=6;n=40;
```

```
h=(b-a)/n;
x= a:h:b;
f=@(x)cos(x)./(1+x.^2);
plot(x,f(x))
title('Courbe de f(x)')
xlabel('x')
ylabel('f')
grid
```

Après exécution on obtient le graphe suivant :

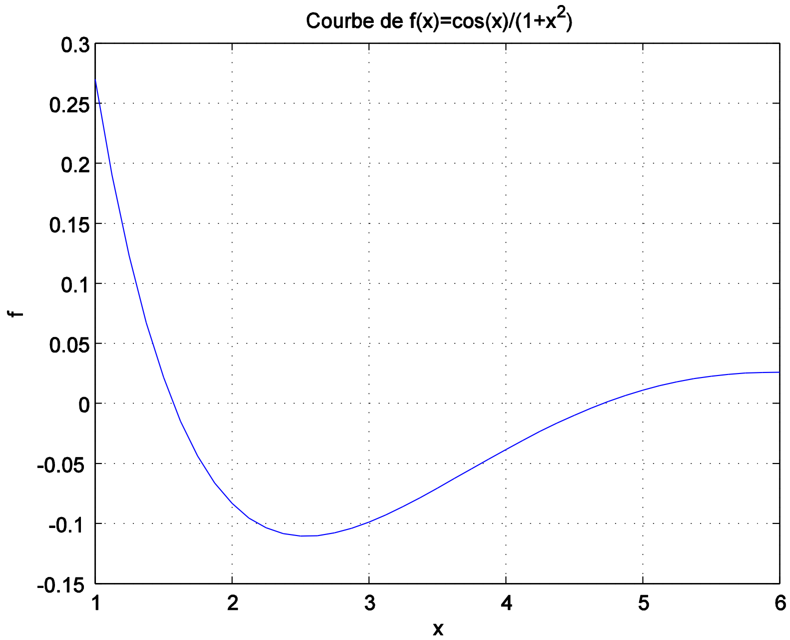


**Figure III.1 :** Courbe de la fonction f(x)=cos(x)/(1+x^2) tracée par MATLAB

2) Les racines de $f(x)$ sont graphiquement les points d'intersection de la courbe de $f(x)$ avec l'axe des abscisses ($y = 0$), il y a donc deux racine $c_1$ et $c_2$ où $c_1 \in [1.5\,, 2]\,, c_2 \in [4.5\,, 5]$.

3) Calcule de la racine par la fonction Matlab prédéfinie :

```
>> c=fzero(@(x)cos(x)/(1+x^2),[1.5,2])
c =1.5708
```

4) Programme Matlab de la méthode de dichotomie :

```
close all;clear all;clc;
a=1.5;
b=2;
c=(a+b)/2;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
eps=1e-2;
k=0;
while abs(b-a)>eps
if f(a)*f(c)<0
b=c;
end
if f(b)*f(c)<0
```

```
a=c;
end
c=(a+b)/2;
k=k+1;
end
k
c
f(c)
```

Après exécution on obtient :
Le nombre des itérations effectués : $k = 6$
La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5742$
Vérification : $f(c_1) = -9.8397e - 004 \approx 0$

5) Augmentons la précision :

| La précision $\varepsilon$ | $10^{-2}$ | $10^{-5}$ | $10^{-7}$ | $10^{-9}$ |
|---|---|---|---|---|
| La racine $c_1$ | 1.5742 | 1.5708 | 1.5708 | 1.5708 |
| Nombre d'itération $k$ | 6 | 16 | 23 | 29 |

On conclut que plus la précision est élevée plus le nombre des itérations effectuées est grand.

### III.3 Méthode de Newton

A partir d'une valeur approchée initiale $x_0$ de la solution de l'équation (III-2), on cherche une correction $\delta x$ telle que :

$$f(x_0 + \delta x) = 0 \tag{III-9}$$

En faisant un développement de Tylor de $f(x)$ autour de $x = x_0$. On trouve :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)\delta x + \frac{f''(x_0)(\delta x)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(\delta x)^3}{3!} + \cdots \tag{III-10}$$

Il suffit maintenant de négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\delta x$ pour obtenir :

$$f(x_0) + f'(x_0)\delta x = 0 \tag{III-11}$$

ou encore :

$$\delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{III-12}$$

La correction $\delta x$ est en principe la quantité que l'on doit ajouter à $x_0$ pour annuler la fonction $f(x)$. Si on pose : $x_1 = x_0 + \delta x$, on aura :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{III-13}$$

Donc à partir d'une valeur approchée de la solution $x_0$ on peut calculer une autre valeur corrigée $x_1$ de la solution.
Pour élever la précision de la correction sur la solution, on répète ce processus et on calcul à chaque fois une autre valeur plus précise $x_{i+1}$ à partir de la dernière valeur calculée $x_i$, en utilisant la formule itérative suivante :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad , \qquad i = 0,1,2,\ldots \tag{III-14}$$

On arrête les calculs lorsque le critère de convergence est atteint :

$$|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon \tag{III-15}$$

où $\varepsilon$ est la précision désirée.

### III.3.1 Algorithme de la méthode de Newton

On pratique le calcul par la méthode de Newton suit l'algorithme suivant :
1. Donner $f(x)$, une précision $\varepsilon$, une valeur initiale $x_0$, et un nombre maximal d'itérations $N$.
2. Calculer $x_{i+1}$ à partir de $x_i$ par la relation (III-14) en commençant de la valeur $x_0$.
3. Si $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$ ; convergence atteinte, écrire la solution $c = x_{i+1}$, écrire $f(c)$ et arrêter le calcul.
4. Si $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$ ; poser $x_{i+1} = x_i$.
Si le nombre maximale d'itération $N$ est atteint ; « convergence non atteinte en $N$ itérations », arrêter le calcul.
5. Retour à l'étape 2.

### III.3.2 Interprétation géométrique de la méthode de Newton

L'interpretation géométrique de la méthode de Newton est illustrée sur la Figure III.2.
On note $r$ la racine exacte de la fonction $f(x)$.
Pour une valeur donnée initiale $x_0$ on trace la tangente à la courbe au point $\left(x_0, f(x_0)\right)$, dont la pente est $f'(x_0)$. Son équation est alors :

$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{III-16}$$

Le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des $x$ est $(x_1, 0)$, alors :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{III-17}$$

ou encore :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{III-18}$$

$x_1$ est donc la nouvelle valeur estimée de la solution rapprochée plus à la valeur exacte $r$ (voir Figure III.2).
Si on applique le même processus dans le cas du point $\left(x_1, f(x_1)\right)$, on peut estimer une autre nouvelle valeur $x_2$ de la solution rapprochée plus à la valeur exacte $r$ (voir Figure III.2), donnée par :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{III-19}$$

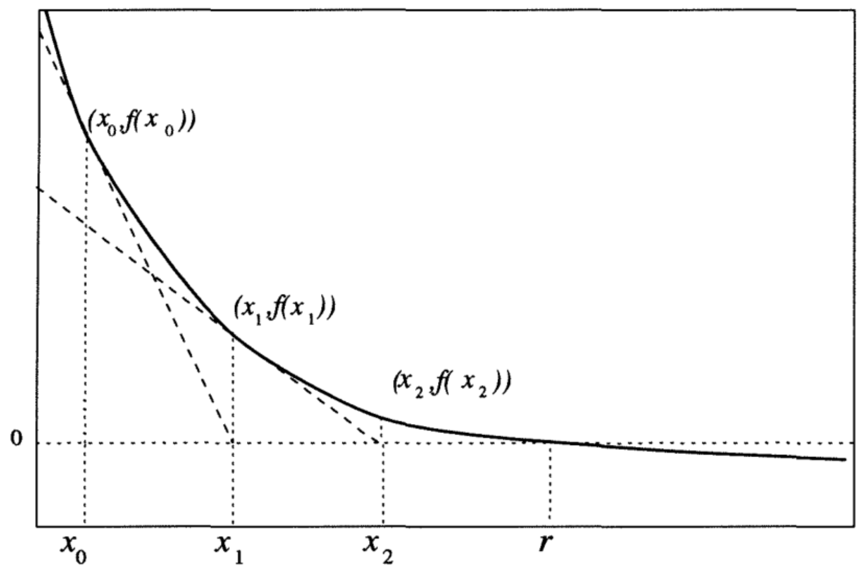


**Figure III.2 :** Interprétation géométrique de la méthode de Newton

D'une manière générale, pour approcher plus en plus la solution approximative à la solution exacte on applique ce processus plusieurs fois successives jusqu'à atteindre la précision demandée.

***Remarque important***

Il faut bien choisir la valeur initiale $x_0$ pour assurer la convergence de l'algorithme de la méthode de Newton

### III.3.3 Exercice III.2

En utilisant la méthode de Newton calculer une valeur approchée à $\varepsilon = 10^{-2}$ de la solution de l'équation (III-8) existant dans l'intervalle $[1.5\,,2]$. On prend la valeur initiale approchée de la solution $x_0 = 1.3$ .

### III.3.4 Corrigé d'exercice III.2

On utilise l'algorithme de la méthode de Newton, on a :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

et

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1+x^2)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{(-\sin(x))(1+x^2) - (2x)\cos(x)}{(1+x^2)^2}$$

On fait alors le calcul numérique :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.3 - \frac{f(1.3)}{f'(1.3)} = 1.5189$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5189 - \frac{f(1.5189)}{f'(1.5189)} = 1.5685$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \mathbf{1.57}08$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \mathbf{1.57}08$$

la racine à une précision $10^{-2}$ est donc $c = 1.57$ qui se stabilise à partir de l'itération 4.

### III.3.5 Travail pratique III.2 : Implémentation MATLAB de la méthode de Newton

1) A partir du graphe tracé de la fonction $f(x)$ dans le travail pratique 1, choisir une valeur initiale $x_0$ proche de la première racine.

2) En utilisant l'algorithme de la méthode de Newton, écrire un programme Matlab qui permet de calculer une valeur approchée de la première racine à la précision $\varepsilon = 10^{-3}$ de la fonction (III-8), par la méthode de Newton, en utilisant la valeur initiale $x_0$ déterminée en 1)**.**

3) Exécuter ce programme pour la précision $\varepsilon = 10^{-8}$. Conclure.

### III.3.6 Corrigé de travail pratique III.2

1) A partir le graphe tracé on choisit par exemple : $x_0 = 1.3$

2) Le programme Matlab de la méthode de Newton :

```
close all;clear all;clc;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
df=@(x)(-sin(x)*(1+x^2)-2*x*cos(x))/((1+x^2)^2);
eps=1e-3;
x0=1.3;
xn=x0;
k=0;
while abs(f(xn))>eps
xn1=xn-f(xn)/df(xn);
```

```
xn=xn1;
k=k+1;
end
k
c=xn
f(c)
```

Après exécution on obtient :
Le nombre des itérations effectués : $k = 2$
La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5685$
Vérification : $f(c_1) = 6.7060e - 004$

3) Pour la précision de $10^{-8}$, le programme retourne le résultat suivant :
Le nombre des itérations effectués : $k = 4$
La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5708$
Vérification : $f(c_1) = 6.1890e - 012$

On conclut que la méthode de Newton est très rapide comparer à la méthode de dichotomie, en effet un nombre d'itération petit permet d'obtenir une racine avec une grande précision.