Université de Djelfa - Département de physique - L2-Socl commun de physique - 2021/2022
Module : Méthodes numériques et programmation

Corrigé de TP 2 : Intégration numérique

I. Travail dirigé

1) La formule de Trapèzes :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

avec :

$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \qquad x_i = a + ih \, , x_0 = a \, , x_n = b \, , i = 0,1,2, \dots , n$$

Donc :

$$f(x) = e^{\sin(x)} \, , a = 0 \, , b = 5 \, , n = 5, h = 1$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$
$f(x_i)$	1	2.3198	2.4826	1.1516	0.4692	0.3833

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_5) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)])$$

$$I(f) \approx 7.1147$$

2) Une majoration de l'erreur commise à la méthode de Trapèzes.

$$\left|I_{ext}(f) - I_{trapz}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

Avec :

$$M_2 = \underbrace{sup}_{[a,b]} |f''(x)|$$

$$f'(x) = \cos(x)\, e^{\sin(x)}$$

$$f''(x) = -\sin(x)\, e^{\sin(x)} + \cos^2(x)\, e^{\sin(x)}$$

$$M_2 = \underbrace{sup}_{[a,b]} |f''(x)| = e$$

Donc :

$$\left|I_{ext}(f) - I_{trapz}(f)\right| \leq 1.1326$$

3) Le nombre de segments n qui permet d'avoir une précision de 0.01 en utilisant la méthode des Trapèzes.

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq 0.01 \quad \Longrightarrow \quad n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12 \times 0.01}} = 53.2 \;\text{ soit}\; n = 54$$

4) Refaire les questions précédentes en utilisant la méthode de Simpson.

a. La formule de Simpson :

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ (i\ pair)}}^{2n-2} f(x_i) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ (i\ impair)}}^{2n-1} f(x_i) \right)$$

avec :

$$h = \frac{b-a}{2n} \quad , \qquad x_i = a + ih\ , x_0 = a\ , x_{2n} = b\ , i = 0,1,2,\ldots,2n-1,2n$$

Pour la méthode de Simpson, le nombre de segments doit être pair, c'est la raison pour laquelle on a pris $n' = 2n = 4$ et non pas $n' = 5$ comme pour le cas précédent.

Donc :

$$f(x) = e^{\sin(x)} \ , a = 0\ , b = 5\ , n' = 2n = 4, h = 1.25$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1.25$	$x_2 = 2.5$	$x_3 = 3.75$	$x_4 = 5$
$f(x_i)$	1	2.5831	1.8193	1.5646	0.3833

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + f(x_4) + 2f(x_2) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big)\Big)$$

$$I(f) \approx 7.3387$$

b. Une majoration de l'erreur commise à la méthode de Simpson.

$$\left|I_{ext}(f) - I_{Simp}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$$

Avec :

$$M_4 = \underbrace{sup}_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$f^{(4)}(x) = [\sin^4(x) + 6\sin^3(x) + 5\sin^2(x) - 5\sin(x) - 3]e^{\sin(x)}$$

$$M_4 = \underbrace{sup}_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 4e$$

Donc :

$$\left|I_{ext}(f) - I_{trapz}(f)\right| \leq 0.7374$$

c. Le nombre de segments n qui permet d'avoir une précision de 0.01 en utilisant la méthode de Simpson.

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq 0.01 \quad \Longrightarrow \quad n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^4}{180 \times 0.01}} = 11.7 \ \text{ soit } n = 12$$

5) La méthode de Simpson est plus précise comparée à la méthode de Trapèzes.

II. <u>Travail pratique</u>

1) On fait la programmation des méthodes numérique de Trapèzes et de Simpson lorsque le nombre de sous intervalle n est grand ($n > 5$).

2) Algorithme de calcul pour la méthode de Trapèzes.

1. Donner un intervalle $[a, b]$, le nombre de sous-intervalles n, la fonction à intégrer $f(x)$.
2. Calculer le pas h.
3. Calculer la valeur approchée de l'intégrale en utilisant la formule de trapèzes.

3) Programme Matlab qui permet de calculer $I(f)$ par la méthode de Trapèzes. En prenant $n = 10$.

(dans un fichier M)

```
clear all;close all;clc
%trapezes.m
a=0;
b=5;
n=10;
h=(b-a)/n;
f=@(x)exp(sin(x));
s=0;
for i=1:n-1
s=s+f(a+i*h);
end
I=(h/2)*(f(a)+f(b))+h*s
```

Le résultat après exécution : n=10 ; I= 7.1705

4)

n	5	10	20	40	80	200	500
I	7.1147	7.1705	7.1845	7.1880	7.1888	7.1891	7.1891

Conclusion :

La valeur approchée de l'intégrale converge vers la valeur I=7.1891 lorsque n augmente plus en plus.

5) Il existe dans Matlab une fonction *trapz* qui implémente la méthode des trapèzes.

(dans un fichier M)

```
clear all;close all;clc
%commande trapz
a=0;
b=5;
n=5
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=exp(sin(x));
I=trapz(x,y)
```

Après exécution on trouve les mêmes résultats :

n	5	10	20	40	80	200	500
I	7.1147	7.1705	7.1845	7.1880	7.1888	7.1891	7.1891

6) Refaire les questions précédentes en utilisant la méthode de Simpson.

a. Algorithme de calcul pour la méthode de Simpson.

1. Donner un intervalle $[a, b]$, le nombre de sous-intervalles n, la fonction à intégrer $f(x)$.
2. Calculer le pas h.
3. Calculer la valeur approchée de l'intégrale en utilisant la formule de Simpson.

b. Programme Matlab qui permet de calculer $I(f)$ par la méthode de Simpson. En prenant $n = 10$. (dans un fichier M)

```
clear all;close all;clc;
%simpson.m
%n doit etre pair
a=0;
b=5;
n=10
h=(b-a)/n;
f=@ (x)exp(sin(x));
s1=0;
for i=1:2:n-1
s1=s1+f(a+i*h);
end
s2=0;
for i=2:2:n-2
s2=s2+f(a+i*h);
end
I=(h/3)*(f(a)+f(b)+4*s1+2*s2)
```

Le résultat après exécution : n=10 ; I= 7.3387

c. Varier n :

n	4	10	20	40	80	200	500
I	7.3387	7.1891	7.1891	7.1891	7.1891	7.1891	7.1891

La convergence de la méthode de Simpson est rapide comparée à la convergence de la méthode de trapèzes.

d. Il existe dans Matlab une fonction *quad* qui implémente la méthode de Simpson. Sa syntaxe : I=quad(*f*,*a*,*b*)

(dans la Zone de Commande)

```
>> I=quad(@(x)exp(sin(x)),0,5)
I =
   7.1891
```