Examen Final (Durée : 1 heure)

Corrigé et barème

Note / 20

Questions de compréhension

1- Quel est l'objectif des méthodes numériques ?

L'objectif des méthodes numériques est le calcul d'une solution approximative des problèmes mathématiques qui ne peuvent pas être résoudre par des méthodes analytiques (exactes). 1

2- La plupart des méthodes numériques sont itératives. Définir une méthode itérative.

Une méthode itérative est une méthode de résolution mathématique qui se base sur la répétition d'un même processus du calcul plusieurs fois jusqu'à atteindre un certain critère de convergence. 1

3- Expliquer la nécessité de programmation sur ordinateur des méthodes numériques.

La programmation sur ordinateur des méthodes numérique (par exemple en utilisant Matlab) est nécessaire puisque ces méthodes se basent sur la réalisation d'un nombre assez grand d'itérations (répétitions) d'un même processus de calcul, ce qui est difficile ou compliqué à effectuer par la main. 1

Exercice

Soit la fonction réelle : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Les deux parties suivantes (**I** et **II)** sont indépendantes.

I- On vaut calculer numériquement l'intégrale :

$$I = \int_0^4 g(x)dx \qquad \text{avec} \qquad g(x) = x^3.f(x)$$

1- Donner la formule de la méthode des trapèzes composée (sans le terme d'erreur) qui permette d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale I.

0,75

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\right)$$

avec $h = (x_n - x_0)/n$ et $x_{i+1} = x_i + h$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ 0,25 x 3

2- Calculer l'intégrale I par la méthode des trapèzes composée, pour des nombres de sous-intervalles $n = 2$ et 3

- Pour $n = 2$: 0,25 x 4

$$h = \frac{4-0}{2} = 2 \quad , \quad x_0 = 0\,, \quad x_1 = x_0 + h = 2\,, \quad x_2 = x_1 + h = 4 \quad , \quad g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$$I = \int_0^4 \frac{x^3}{1+x^2}dx \simeq \frac{2}{2}\left(\frac{0^3}{1+0^2} + 2 \times \left[\frac{2^3}{1+2^2}\right] + \frac{4^3}{1+4^2}\right) = 6{,}9647$$

0,5

- Pour $n = 3$:

$$h = \frac{4-0}{3} = \frac{4}{3}\,, \quad x_0 = 0\,, \quad x_1 = x_0 + h = \frac{4}{3}\,, \quad x_2 = x_1 + h = \frac{8}{3}\,, \quad x_3 = x_2 + h = 4$$

0,25 x 5

$$I=\int_0^4 \frac{x^3}{1+x^2}dx \simeq \frac{\frac{4}{3}}{2}\left(\frac{0^3}{1+0^2}+2\times\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{8}{3}\right)^2}\right]+\frac{4^3}{1+4^2}\right)=6{,}7647$$

0,5

3- Par un calcul analytique on a trouver :

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

a- Calculer la valeur exacte de I.

$$I_{ext}=\int_0^4 \frac{x^3}{1+x^2}dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^4=\left(\frac{4^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+4^2\right)\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+0^2\right)\right)$$

$$I_{ext}=6{,}5833$$

0,75

b- Comparer avec les valeurs approchées obtenues dans **3** et conclure.

Comparaison : On remarque que lorsque le nombre choisi de sous-intervalles n augmente, les valeurs approchées convergent vers la valeur exacte $I_{ext}=6{,}5833$

Conclusion : La méthode des trapèzes composée donne un résultat plus précise lorsque le nombre choisi de sous-intervalles n est plus grand. Cependant, pour des valeurs grandes de n le calcul devient difficile à réaliser par la main, il faut alors utiliser l'ordinateur.

0,5 x 2

II- On vaut calculer numériquement une solution (racine) de l'équation :

$$h(x)=0 \qquad \text{avec} \qquad h(x)=\cos(x).f(x)$$

1- Existe-elle une racine dans les intervalles suivants : [-1 , 0] , [4.5 , 5] ? Justifier.

$$h(x)=\cos(x).f(x)=\frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

On utilise le théorème des valeurs intermédiaires :

$h(-1)\times h(0)=0{,}2701>0$; il n'existe pas une racine dans $[-1\,,0]$

0,5 + 0,25

$h(4{,}5)\times h(5)=-1{,}0822\times 10^{-4}<0$; il existe une racine dans $[4{,}5\,,5]$

0,5 + 0,25

2- Quelle est l'idée de base de la méthode de la bissection ?

La méthode de la bissection se base sur la division successive en deux de l'intervalle contenant la racine, ce qui donne à chaque division un nouveau sous intervalle plus petit et contient la racine. On arrête ce processus lorsque le critère de convergence est atteint.

0,5 x 2

3- Donner l'expression du critère de convergence utilisé dans la méthode de la bissection.

Le critère de convergence est la condition pour laquelle on fait arrêter le calcul et obtenir une solution à une précision ε. Dans la méthode de la bissection on fait arrêter le calcul d'une racine α dans $[a\,,b]$ lorsque : $\frac{|b-a|}{2c}<\varepsilon$ avec $c=\frac{a+b}{2}$

0,5 x 2

4- Calculer théoriquement les nombres d'itérations nécessaires pour obtenir une racine dans l'intervalle [1.5 , 2] pour les précisions $\varepsilon_1=10^{-1}, \varepsilon_2=10^{-2}$ et $\varepsilon_3=10^{-3}$

$$\text{Pour } \varepsilon_1=10^{-1} ;\ n>\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon_1}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{2-1{,}5}{10^{-1}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n>2{,}32 \text{ donc } n=3$$

$$\text{Pour } \varepsilon_2=10^{-2} ;\ n>\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon_2}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{2-1{,}5}{10^{-2}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n>5{,}64 \text{ donc } n=6$$

$$\text{Pour } \varepsilon_3=10^{-3} ;\ n>\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon_3}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{2-1{,}5}{10^{-3}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n>8{,}96 \text{ donc } n=9$$

0,5 x 3

Conclusion : Dans la méthode de la bissection le nombre d'itération à réaliser dépend de la précision demandée, en effet, si le nombre d'itération augmente, la précision augmente. 0,5

5- Calculer, par la méthode de la bissection, la racine approchée α à une précision $\varepsilon_1 = 10^{-1}$ et qui se trouve dans l'intervalle [1,5 , 2].

$h(1{,}5) \times h(2) = -1{,}81 \times 10^{-3} < 0$ 0,5

Itération 1 : l'intervalle [1,5 , 2] contient la racine α

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$

$h(1{,}5) \times h(1{,}75) = -9{,}54 \times 10^{-4} < 0$ 0,25 x 4

$h(1{,}75) \times h(2) = 3{,}65 \times 10^{-3} > 0$

Itération 2 : l'intervalle [1,5 , 1,75] contient la racine α

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}75}{2} = 1{,}625$

$h(1{,}5) \times h(1{,}625) = -3{,}23 \times 10^{-4} < 0$ 0,25 x 4

$h(1{,}625) \times h(1{,}75) = 6{,}52 \times 10^{-4} > 0$

Itération 3 : l'intervalle [1,5 , 1,625] contient la racine α

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}625}{2} = \mathbf{1{,}5}625$

$h(1{,}5) \times h(1{,}5625) = 5{,}24 \times 10^{-5} > 0$ 0,25 x 4

$h(1{,}5625) \times h(1{,}625) = 3{,}58 \times 10^{-5} < 0$

Itération 4 : l'intervalle [1,5625 , 1,625] contient la racine α

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5625+1{,}625}{2} = \mathbf{1{,}5}9375$ 0,25

A partir de l'itération 3, un chiffre après la virgule devient constant, donc la racine à une précision de $\varepsilon_1 = 10^{-1}$ est : $\alpha \simeq c \simeq 1{,}5$ 0,5

6- Comparer entre les nombres d'itération théorique et pratique et conclure.

Pratiquement, nous avons obtenu la racine prés de 10^{-3} à l'itération 3, on conclut que les nombres d'itération théorique et pratique sont les mêmes. 0,75