| | | |
|---|---|---|
| **Nom :** | **Prénom :** | **Signature :** |

# Corrigé du Test de MNP

Note sur 8

Soit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante : $y'(t) - \frac{3}{t}y(t) = t$
avec la condition initiale $(t_0\ ,\ y_0) = (1\ ,3)$ de la solution.

**1-** Ecrire cette équation sous la forme : $y'(t) = f(y(t), t)$ en précisant l'expression de $f(y(t), t)$.

$$y'(t) = t + \frac{3}{t}y(t) = f(y(t), t)$$

0,5

**2-** Rappeler la formule d'Euler qui permette la résolution approximative de cette équation.

La formule de la méthode d'Euler permet de trouver un point $(t_{i+1}, y_{i+1})$ à partir le point précédent $(t_i, y_i)$, elle est donnée par :

0,25 x 3

$$y_{i+1} = y_i + h \times f(t_i, y_i) \quad \text{avec} \quad t_{i+1} = t_i + h \quad \text{et} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$n$ est le nombre d'itération, $h$ est le pas de $t$, et les valeurs initiales $(t_0, y_0)$ sont donnés

**3-** Ecrire l'algorithme de la méthode d'Euler.

Pour effectuer un calcul numérique par la méthode d'Euler on suit l'algorithme suivant :

1. Donner un pas $h$ pour les $t$, une condition initiale $(t_0, y_0)$ et un nombre maximale d'itérations $n$
2. Pour $0 \leq i \leq n$ :
   - $y_{i+1} = y_i + h \times f(t_i, y_i)$
   - $t_{i+1} = t_i + h$
   - Ecrire $t_{i+1}$ et $y_{i+1}$
3. Arrêt

0,25 x 4

**4-** Résoudre cette équation par la méthode d'Euler pour des valeurs du pas $\boldsymbol{h_1 = 0,02}$ et $\boldsymbol{h_2 = 0.01}$ des valeurs de $t$, en réalisant $\boldsymbol{n = 2}$ itérations pour chaque valeur du pas. (écrire les résultats dans les colonnes 2 et 3 des tableaux 1 et 2).

**Pour $\boldsymbol{h_1 = 0,02}$**

Itération 1 : $(i = 1)$

$$y_1 = y_0 + h \times f(t_0\ , y_0) = 3 + 0,1 \times f(1\ ,3) = 3 + 0,02 \times \left(1 + \frac{3}{1} \times 3\right) = 3,2$$

0,5

$$t_1 = t_0 + h = 1 + 0,02 = 1,02$$

0,25

Itération 2 : $(i = 2)$

$$y_2 = y_1 + h \times f(t_1, y_1) = 3,2 + 0,02 \times f(1,02\ ,3,2) = 3,2 + 0,02 \times \left(1,02 + \frac{3}{1,02} \times 3,2\right) = 3,4086$$

0,5

$$t_2 = t_1 + h = 1,02 + 0,02 = 1,04$$

0,25

**Pour $\boldsymbol{h_2 = 0,01}$**

Itération 1 : $(i = 1)$

$y_1 = y_0 + h \times f(t_0\,, y_0) = 3 + 0{,}01 \times f(1\,, 3) = 3 + 0{,}01 \times \left(1 + \frac{3}{1} \times 3\right) = 3{,}1$ 0,5

$t_1 = t_0 + h = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$ 0,25

Itération 2 : $(i = 2)$

$y_2 = y_1 + h \times f(t_1, y_1) = 3{,}1 + 0{,}01 \times f(1{,}01\,, 3{,}1) = 3{,}1 + 0{,}01 \times \left(1{,}01 + \frac{3}{1{,}01} \times 3{,}1\right)$

$= 3{,}2021$ 0,5

$t_2 = t_1 + h = 1{,}01 + 0{,}01 = 1{,}02$ 0,25

**5-** La solution exacte de cette équation différentielle est : $y(t) = -t^2 + 4t^3$

**a-** Compléter les colonne 4 et 5 des tableaux 1 et 2.

**<u>Tableua 1 : Cas de $h_1 = 0,02$</u>**

| | Solution approchée | | Solution exacte | Erreur absolue |
|---|---|---|---|---|
| Itération $i$ | $t_i$ | $y_i$ | $(y_i)_{ext}$ | $\lvert (y_i)_{ext} - y_i \rvert$ |
| 0 | 1 | 3 | 3 | 0 |
| 1 | 1,02 | 3,2 | 3,2044 | 0,0044 |
| 2 | 1,04 | 3,4086 | 3,4179 | 0.0093 |

0,5 0,5

**<u>Tableua 2 : Cas de $h_2 = 0,01$</u>**

| | Solution approchée | | Solution exacte | Erreur absolue |
|---|---|---|---|---|
| Itération $i$ | $t_i$ | $y_i$ | $(y_i)_{ext}$ | $\lvert (y_i)_{ext} - y_i \rvert$ |
| 0 | 1 | 3 | 3 | 0 |
| 1 | 1,01 | 3,1 | 3,1011 | 0,0011 |
| 2 | 1,02 | 3,2021 | 3.2044 | 0,0023 |

0,5 0,5

**b-** Comparer numériquement entre les solutions numérique et analytique. Conclure.

On remarque que :

- les valeurs approchées et exactes sont proches.
- l'erreur absolue entre les valeurs approchée et exacte diminue lorsque $h$ diminue. 0,5

Conclusion :

Dans la méthode d'Euler, dès que le pas de déscritisation h plus petit dès que la solution plus précise.

0,25