الفصل الثاني

البرمجة الخطية وطريقة الحل البياني

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة. وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعين والتخصيص ....الخ.

I- مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والإقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها وإستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923. وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الإقتصادي جورج ستلجر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة[1].

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[2].

إن تعبير **البرمجة** يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير **خطية** فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)[3]، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات

---

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 25.

[2] . عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 21.

[3] - Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée** ", les édition SMG ,Québec , Canada,1996 .p 05 .

الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع[1]:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

II- متطلبات وفروض نموذج البرمجة الخطية:

II-1- متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي[2]:

- **تحديد الهدف:** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

حالة تعظيم : $Max\ (Z) = 2x + 3y$

حالة تدنئة : $Min\ (Z) = 2x + 3y$

- **توفير عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- **محدودية الموارد:** نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات.وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

[2]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية**"، دار اليازوري، الأردن، 2013. ص ص: 09-10.

- **وجود علاقة خطية:** الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- **القيود غير السالبة:** إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

II-2- فروض نموذج البرمجة الخطية:

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي[1]:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة و التناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية)؛
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي[2]:

- **الخطية:** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- **المحدودية:** محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- **عدم السلبية:** عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- **الاستقلالية:** أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

III- مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

---

[1] . مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015. ص 10.

[2] . محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص ص: 08-09 .

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي[1]:

- **في حالة التعظيم:**
  - ✓ تعظيم الأرباح؛
  - ✓ تعظيم الإنتاج؛
  - ✓ تعظيم طاقات التخزين؛
  - ✓ تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
  - ✓ تعظيم إستخدام اليد العاملة.

وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

- **في حالة التدنئة:**
  - ✓ تدنئة التكاليف؛
  - ✓ تدنئة الخسائر؛
  - ✓ تدنئة عدد الموظفين؛
  - ✓ تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها[2]:

- **التطبيقات التسويقية:** مثل اختيار وسائط الإعلانات، وبحوث التسويق؛
- **التطبيقات المالية:** مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية؛
- **تطبيقات إدارة الإنتاج:** مثل الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.
- **مشاكل المزج؛**
- **مشاكل تخطيط المشروعات.**

وغيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دوراً بارزاً في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

---

[1] . راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.

[2] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 27.

IV- صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية:

إن صياغة مشكلة إدارية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي كما أشرنا سابقا تطوير نموذج رياضي يمثل الحالة أو المشكلة الإدارية، وبهذا فإنه يجب فهم الموقف الإداري أو المشكلة فهما دقيقاً وهي الخطوة الأولى لحلها، إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يمكن أن تجمل خطواته بالآتي:

- ✓ الفهم الكامل والدقيق للمشكلة الإدارية التي يواجهها المدير ؛
- ✓ تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة؛
- ✓ تحديد متغيرات القرار ؛
- ✓ استخدام متغيرات القرار في كتابة العبرات الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

IV-1- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من اجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- **تحديد الهدف بصورة كمية:**

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عند الدالة المطلوب تعظيمها أو تدنيتها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوبة تحليلها ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق اكبر ما يمكن من الربح أو تأمين اصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد؛

- **تحديد القيود:**

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معادلات، أو خليط منها وتسمى يالقيود الهيكلية؛

- **شرط عدم السلبية:**

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي[1]:

$$Max\_or\_Min(z)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$Subject\_to$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(\leq,=,\geq)b_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots\ldots,m)$$

$$x_j\geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$$

إذ أن: a_{ij},b_i,c_j ثوابت تحدد من سياق المشكلة؛

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 20.

Z : تمثل دالة الهدف؛

X_j: المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحقها؛

b_i: تمثل الموارد المحددة؛

a_{ij}: كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

C_j: تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

IV-2- تركيب نموذج البرمجة الخطية:

وتعد مرحلة تركيب النموذج من أهم مراحل البرمجة الخطية إذ تعد مرحلة عملية أكثر منها فنية وتعتمد على خبرة الباحث ومقدرته على صياغة المشاكل بشكل نموذج برمجة خطية، ولتوضيح هذه المرحلة سنورد المثال الآتي:

مثال رقم (01): تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعيا وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة B هو 3 دينار.

المطلوب: نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة).

ربح الوحدة بالدينار	الوقت اللازم للتصنيع			السلعة
	القسم الثالث	القسم الثاني	القسم الأول	
2	4	1	2	**A**
3	2	2	2	**B**
	280	**120**	**160**	**ساعات العمل المتاحة**

تكوين النموذج:

✓ تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1.

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2.

✓ تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A و السلعة B.

بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A)+ (عدد الوحدات المنتجة من السلعةB)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، وعلى النحو الآتي:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ تحديد دالة الهدف:

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

وتهدف إلى انتاج الكميات المثلى من x_1, x_2 التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize ودائما تختصر بـ Max

البرنامج الخطي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

مثال رقم (02): تنتج إحدى الشركات ثلاث أنواع من عصير الفواكه في مصنعيين A و B وإن كميات الإنتاج في اليوم تقدر كالآتي:

نوع العصير	المنتج A (لتر)	المنتج B (لتر)
1	1500	1500
2	3000	1000
3	2000	5000

وقد أظهرت دراسة للسوق أن من المتوقع أن يكون هناك طلب في شهر جويلية يقدر بـ 20000 لتر من النوع الأول و 40000 من النوع الثاني و 44000 من النوع الثالث، وكذلك فإن كلفة تشغيل المصنع A هي 600 وحدة نقدية في اليوم و 400 وحدة نقدية للمصنع B.

المطلوب: تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كلا من المصنعين للوفاء بطلب السوق المتوقع في شهر جويلية مع تدنية التكاليف إلى أدنى حد ممكن (صياغة المسألة)، وكتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي.

الحل:

القرار هو تحديد عدد الأيام التي يشتغلها كل من المصنعين في شهر جويلية.

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع X_1=A

نفترض أن عدد الأيام التي يشتغلها المصنع X_2=B

ومنه البرنامج الخطي هو :

$$Min(z) = 600x_1 + 400x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 1500x_1 + 1500x_2 \le 20000 \\ 3000x_1 + 1000x_2 \le 40000 \\ 2000x_1 + 5000x_2 \le 44000 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

أما الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$Min(z) = \begin{pmatrix} 600 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1500 & 1500 \\ 3000 & 1000 \\ 2000 & 5000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20000 \\ 40000 \\ 44000 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3-IV− تمارين محلولة:

التمرين الأول: تتعهد إحدى الشركات بتقديم 100 كغم من مادة غذائية تتكون من مزيج ثلاث مواد: A، C،B بشرط أن يحتوي هذا المزيج على:

- ✓ %0,08 على الأقل وليس أكثر من %1,2 من الكالسيوم.
- ✓ %22 بروتين على الأقل.
- ✓ %50 ألياف في أكثر الحدود.

فإذا كانت محتويات المواد الثلاثة من العناصر الغذائية وكلفة كل منها كالأتي:

المواد	الكمية الموجودة في كل كغم			الكلفة/كغم
	كالسيوم	بروتين	ألياف	
A	0,380	−	−	0,0164
B	0,001	0,09	0,02	0,0463
C	0,002	0,50	0,08	0,1250

المطلوب: صياغة الحالة في شكل برمجة خطية بحيث يتم تلبية المتطلبات الغذائية وتدنية الكلفة إلى أدنى حد ممكن.

حل التمرين الأول: القرار هنا هو تحديد المزيج الأمثل من المواد الثلاث.

نفترض أن كمية X_1= A ، وكمية X_2 = B، وكمية X_2= C .

ومنه البرنامج الخطي للمسألة كالتالي:

$$Min(z) = 0{,}0164x_1 + 0{,}0463x_2 + 0{,}1250x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 0{,}380x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \leq 0{,}012 \\ 0{,}380x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \geq 0{,}008 \\ 0{,}09x_2 + 0{,}50x_3 \geq 0{,}22 \\ 0{,}02x_2 + 0{,}08x_3 \leq 0{,}50 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

التمرين الثاني: ترغب إحدى شركات الطباعة في شراء نوعين من المطابع هما A و نوع B ، والنوع A يشغل مساحة مقدارها 40 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة الواحدة 2000 دينار وتحتاج إلى ثلاثة عمال يعملون لمدة 8 ساعات، أما النوع B فيشغل مساحة مقدارها 60 متر مربع وتبلغ كلفة الوحدة 6000 دينار وتحتاج إلى 4 عمال يعملون لمدة 8 ساعات . فإذا كانت المساحة المتاحة لدى الشركة هي 720 متر مربع والميزانية المخصصة لشراء المطابع هي 60000 دينار، علما بأن لدى الشركة 48 عاملا، ويمكن للمطبعة A أن تعمل بمعدل 100 ورقة في الدقيقة والمطبعة B يمكنها أن تعمل بمعدل 300 ورقة في الدقيقة.

المطلوب : كون نموذج برمجة خطية لتحديد العدد اللازم شراؤه من النوعين من المطابع A و B لكي تتمكن الشركة من تحقيق أكبر إنتاج.

حل التمرين الثاني:

X_1 = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع A.

X_2 = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع B .

ومنه البرنامج الخطي يكون كالآتي:

$$Max(z) = 48000x_1 + 144000x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 40x_1 + 60x_2 \leq 720 \\ 2000x_1 + 6000x_2 \leq 60000 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 48 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

التمرين الثالث: يتم فحص المنتجات الصناعية في إحدى المنشأة من قبل نوعين من المفتشين A و B (التصنيف على أساس الكفاءة في الفحص)، يتوقع أن يتم فحص ما لا يقل عن 1500 وحدة من المنتج يومياً (8 ساعات عمل/ يوم). فإذا علمت بأن المفتش A يستطيع فحص 20 قطعة في الساعة وبدقة 96% في حين أن المفتش B يستطيع فحص 14 قطعة وبدقة 92%، إن الأجور المدفوعة لكلا النوعين من المفتشين هي 5 وحدات نقدية في الساعة للمفتش A و 4 للمفتش B كذلك فإن عدد المفتشين الموجودين في المؤسسة هو 10 من النوع A و15 من النوع B.

المطلوب: تخصيص العدد الأمثل من المفتشين لإنجاز هدف المهمة وذلك بصياغة المسألة في شكل برمجة خطية.

حل التمرين الثالث: إن القرار هنا هو تحديد العدد الأمثل من المفتشين من كلا النوعين A وB .

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع X_1=A

نفترض أن عدد المفتشين المطلوب من النوع X_2=B

إن الهدف سيكون تقليل الكلفة الكلية للمفتشين، علما بأن الكلفة المرتبطة بكل نوع منهم ستكون كالآتي:

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع A هي : $5 + (3*0,04*20) = 7,40$ وحدة نقدية .

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع B هي : $4 + (3*0,08*14) = 7,36$ وحدة نقدية.

دالة الهدف : $8(7,40X_1+7,36X_2) = 59,20X_1+58,88X_2$

القيد الثالث: $20*8X_1 + 14*8X_2 \geq 1500$

ومنه البرنامج الخطي يكون كالتالي:

$$Min(z) = 59,20x_1 + 58,88x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 15 \\ 160x_1 + 112x_2 \geq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

IV-4- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: مؤسسة إقتصادية بها 3 ورشات لإنتاج 3 أنواع من المنتوجات هي: خزائن حديدية، مكاتب إدارية، كراسي. بحيث أن كل منتوج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

الورشة رقم01: تجري بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها هي: 32 ساعة عمل يوميا، (أي 4 عمال كل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا).

الورشة رقم 02: تجري بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا.
الورشة رقم 03: تجري بها عملية الإنهاء (طلاء ، تزيين ، تغليف)، طاقة العمل القصوى بها هي: 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحدة من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في (الورشة رقم01) و 2 ساعة عمل في (الور02) و 2 ساعة عمل في (الور03)، بينما الوحدة الواحدة من المنتوج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في (الور01) و 4 ساعات عمل في (الور02) و 2 ساعة عمل في (الور03)، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتوج 3 تتطلب 5 ساعات عمل في (الور01) و 3 ساعات عمل (الور02) و 1 ساعة عمل في (الور03) .كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتوج هو: المنتوج الأول: 200 دج، المنتوج الثاني: 150 دج، المنتوج الثالث: 120 دج.

المطلوب: أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة مع شكل المصفوفي.

التمرين الثاني: يمكن لشركة استخدام ثلاث عمليات إنتاجية (أ)، (ب)، (ج) في مصنعها لإنتاج أحد المنتوجات، للحصول على كل وحدة من المنتوج تحتاج العملية (أ) إلى 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات، بينما تحتاج العملية (ب) إلى 1,5 ساعة عمالة و 1,5 ساعة آلات ، أما العملية (ج) فتحتاج إلى 1,1 ساعة عمالة و 2,2 ساعة آلات. ويجب على الشركة دفع 300 وحدة نقدية لكل ساعة عمالة و 200 ون لكل ساعة آلات لكنها لا تستطيع استخدام أكثر من 1200 ساعة آلات شهريا حيث أن ذلك هو أكبر قدر متاح في مدى القصير. إذا رغبت الشركة في إنتاج 1000 وحدة شهريا. فما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها باستخدام العملية (أ)،(ب)،(ج)؟

التمرين الثالث: تصنع مؤسسة نوعين من المعاطف، معاطف للرجال معاطف للنساء، سعر بيع كل معطف رجالي 7500 دج و 8200 دج لكل معطف نسائي. وحسب متطلبات السوق لا يجب أن يتعدى إنتاج النوعين 6000 وحدة و 3000 وحدة على التوالي أسبوعيا. يتوافر لدى المؤسسة 50 عامل ويشتغل كل عامل 10 ساعات يوميا و5 أيام أسبوعيا. مدة صنع معطف النساء ضعف مدة صنع معطف الرجال وإذا أرادت المؤسسة صنع المعاطف الرجالية فقط فيمكن أن تصنع 1600 معطف في اليوم.

المطلوب: ما هو البرنامج الخطي الذي يسمح بمعرفة عدد المعاطف الواجبة الصنع في الأسبوع من كل نوع.

التمرين الرابع: السيد: " س " يعمل كمسير في مستشفى و يجب عليه توفير المكونات الغذائية الأساسية لغذاء مرضى قسم الجراحة العامة، الطبيب المكلف بالقسم أعطى له التوصيات التالية للمكونات التي يجب أن تحتوي عليها وجبة المريض وهي:

- على الأقل 50 وحدة من البروتين.
- على الأقل 15 وحدة من الفيتامينات.
- على الأقل 1200 حريرة.
- على الأكثر 100 وحدة من الدسم.

السيد: " س " لجأ إلى المختصين في التغذية للمستشفى، والذين أعطوا له الكميات التي جرت العادة شراءها من الأغذية وهي في الجدول التالي:

وسعر الأغذية في السوق كان ما يلي: حوت 45 دج للكلغ، دجاج 18 دج للكلغ، جبن 35 دج للكلغ، جزر 6 دج للكلغ ، بطاطا 5 دج للكلغ ، عجائن 8 دج للكلغ .

المحتويات / الغذاء	حوت (100غ)	دجاج (100غ)	جبن (100غ)	جزر (كلغ)	عجائن (كلغ)	بطاطا (كلغ)
البروتين	40	50	30	20	22	15
الفيتامين	25	10	20	30	15	25
الدسم	10	20	30	50	100	80
الحريرات	300	500	600	1400	2000	1800

المطلوب: إعداد البرنامج الذي يسمح بتحديد مكونات الوجبة بأقل سعر مع الحفاظ على صحة المريض.

V- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (X_1,X_2)[1].

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

V-1- خطوات إيجاد الحل الأمثل:

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

- ✓ تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛
- ✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لاتحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمن وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

---

[1]. سهيلة عبد الله سعيد: " **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة[1].

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

مثال رقم (01): أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

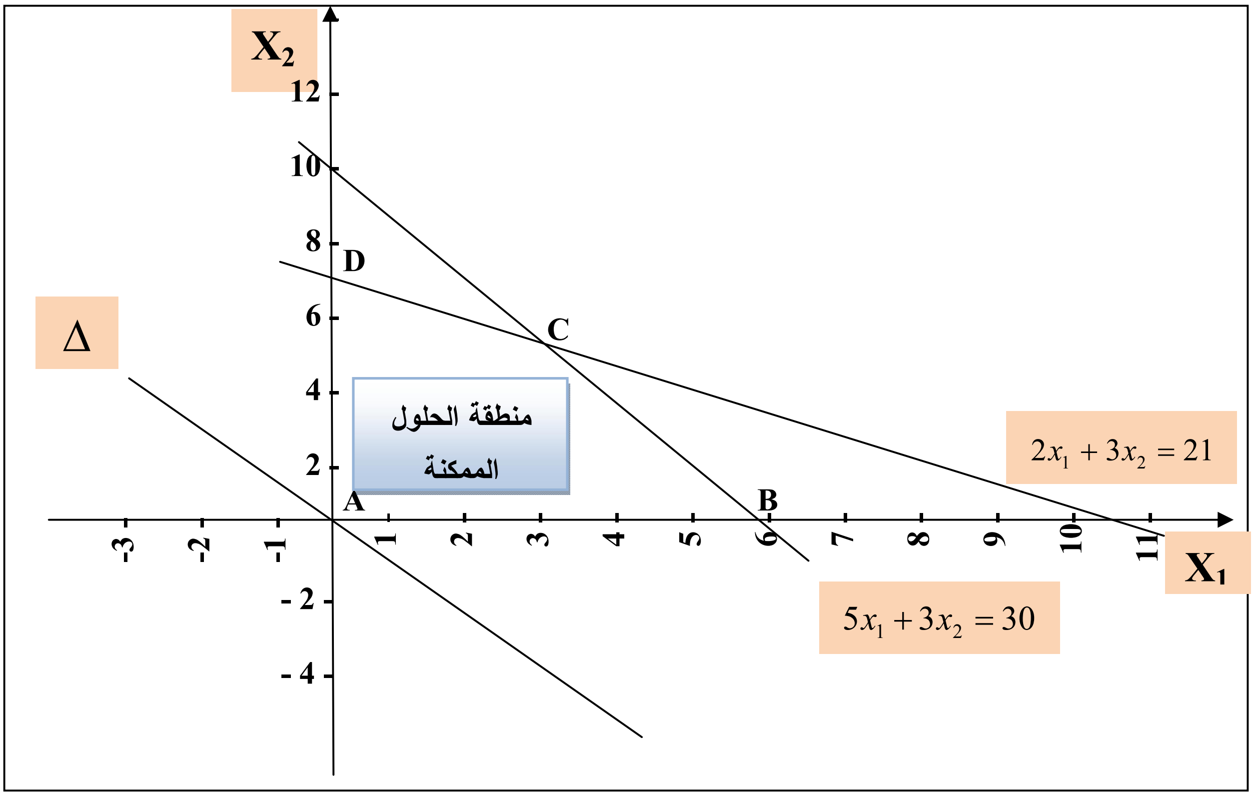
[1] . محمد راتول، مرجع سابق، ص 26.

$2x_1+3x_2=21$	
x_1	x_2
0	7
10,5	0

$5x_1+3x_2=30$	
x_1	x_2
0	10
6	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$4x_1+3x_2=0$	
x_1	x_2
3	-4
$-2,25$	3



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D).

أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة (Δ) فنجد قيمة X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30........(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21........(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $C : (x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2 \times 3 + 3 \times 5 = 21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة ، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4 \times 3 + 3 \times 5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A : (x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B : (x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_B = 24$
C	$C : (x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D : (x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_D = 21$

ملاحظة: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

مثال رقم (02): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 70 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$

$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

$$2x_1 + 8x_2 = 90$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

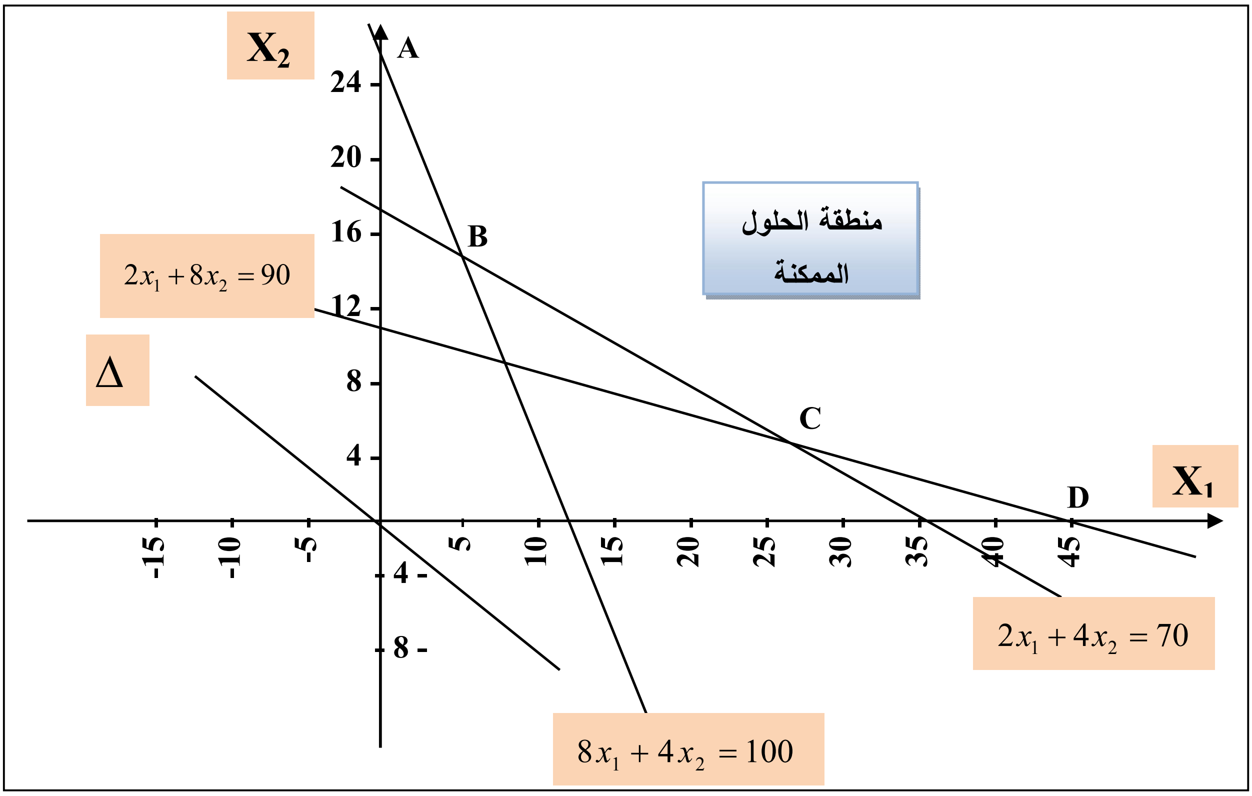
$2x_1 + 8x_2 = 90$	
x_1	x_2
0	11,25
45	0

$2x_1 + 4x_2 = 70$	
x_1	x_2
0	17,5
35	0

$8x_1 + 4x_2 = 100$	
x_1	x_2
0	25
12,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	$-2{,}64$
$-3{,}4$	3



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل وذلك لأن المتراجحات في هذه المشكلة من النوع أكبر أو يساوي وبالتالي فإن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط (ABCD).

حيث إحداثيات النقطة A هي: (25; 0) والنقطة D هي: (45;0)

أما النقاط B و C فلا يمكن تحديد إحداثياتهم مباشرة من الرسم الأمر الذي يتطلب استخراجهم من خلال حل المعادلات كما يلي:

النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الثاني والثالث:

$$2x_1+4x_2=70$$
$$2x_1+8x_2=90$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $C:(x_1=25, x_2=5)$

النقطة B متولدة من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$
$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة (A,B,C,D) في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة (B) لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 0, x_2 = 25)$	$Z_A = 21{,}25$
B	$B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$	$Z_B = 16{,}50$
C	$C:(x_1 = 25, x_2 = 5)$	$Z_C = 23$
D	$D:(x_1 = 45, x_2 = 0)$	$Z_D = 33{,}75$

ولتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (B) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $8 \times 5 + 4 \times 15 = 100$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2 \times 5 + 4 \times 15 = 70$

القيد الأول: قيد محقق $2 \times 5 + 8 \times 15 = 130 \succ 90$

القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على مايلي:

$$Z_B = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0{,}75 \times 5 + 0{,}85 \times 15 = 16{,}50$$

V-2- حالات خاصة في الحل البياني:

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

- **تعدد الحلول المثلى:**

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

مثال رقم (03): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_2 = 4$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

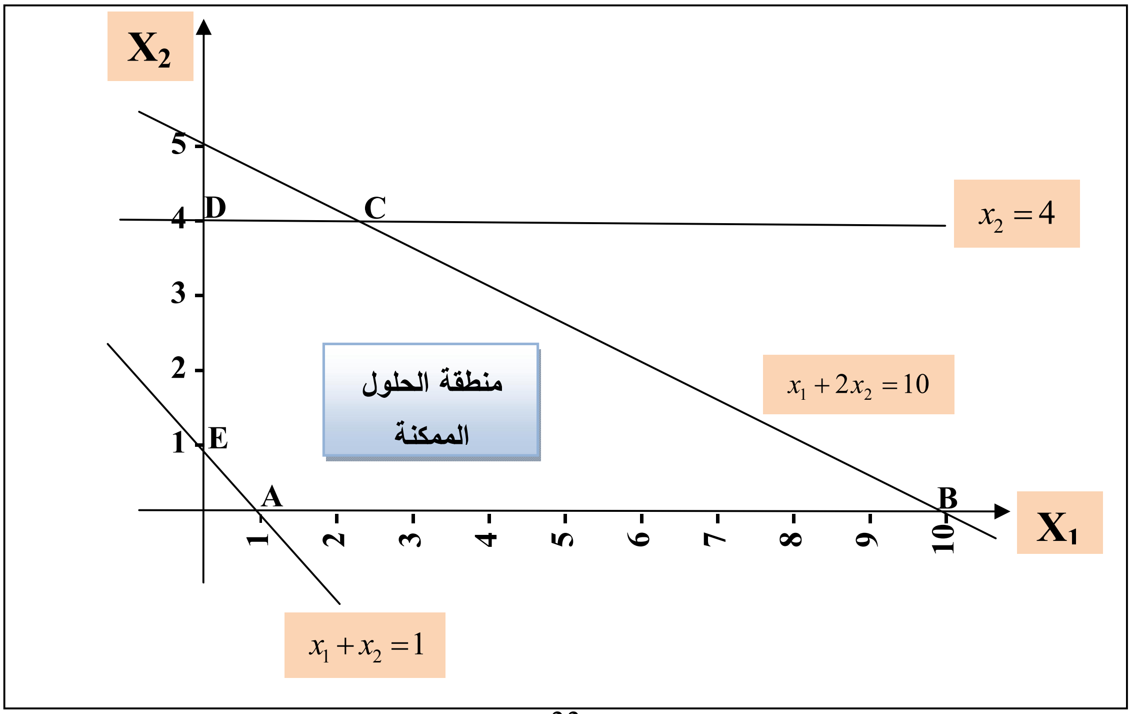
$x_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي .

$x_1 + x_2 = 1$

x_1	x_2
0	1
1	0

$x_1 + 2x_2 = 10$

x_1	x_2
0	5
10	0



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة A هي: (0; 1) والنقطة B هي: (0; 10) أما النقطة D هي: (4; 0) و E هي: (1; 0).

أما النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A : (x_1 = 1, x_2 = 0)$	$Z_A = 1$
B	$B : (x_1 = 10, x_2 = 0)$	$Z_B = 10$
C	$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$	$Z_C = 10$
D	$D : (x_1 = 0, x_2 = 4)$	$Z_D = 8$
E	$E : (x_1 = 0, x_2 = 1)$	$Z_E = 2$

من الجدول نجد أن النقطتين C و B تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

- **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة ، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية[1] وكما يلي:

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

مثال رقم (04): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 20x_1 + 15x_2$$

$$s/c$$

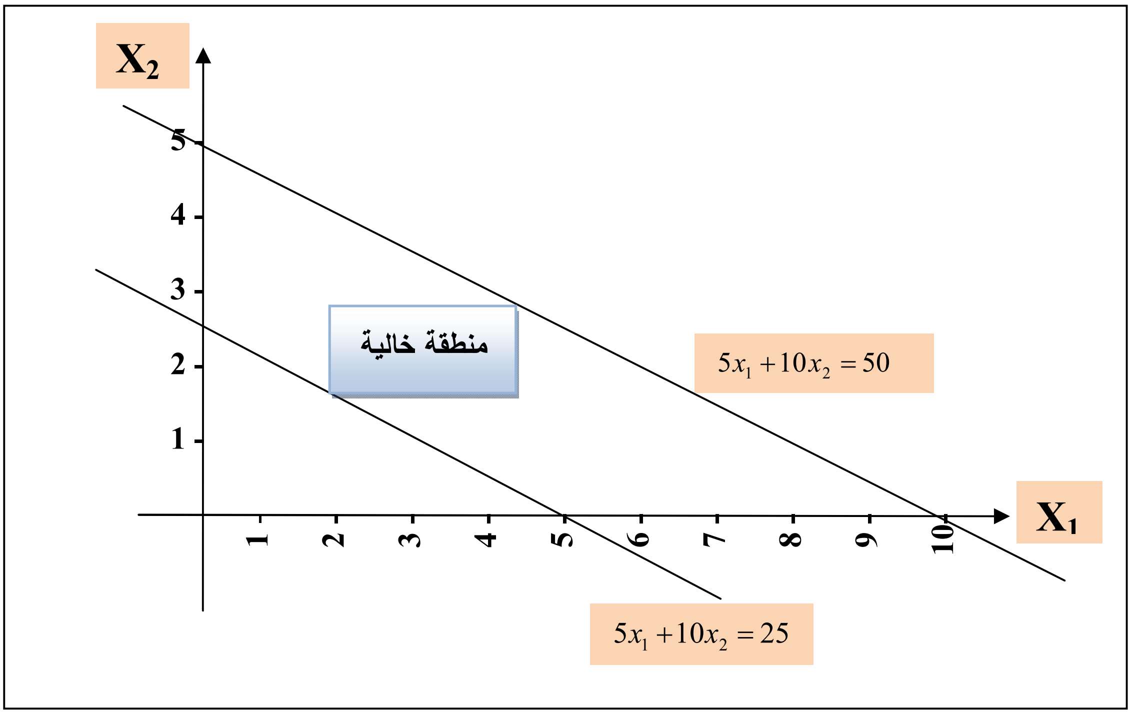
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 50 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$5x_1 + 10x_2 = 50$	
x_1	x_2
0	5
10	0

$5x_1 + 10x_2 = 25$	
x_1	x_2
0	2,5
5	0



من خلال الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

- **منطقة الحل الممكن غير محدودة:**

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم[1].

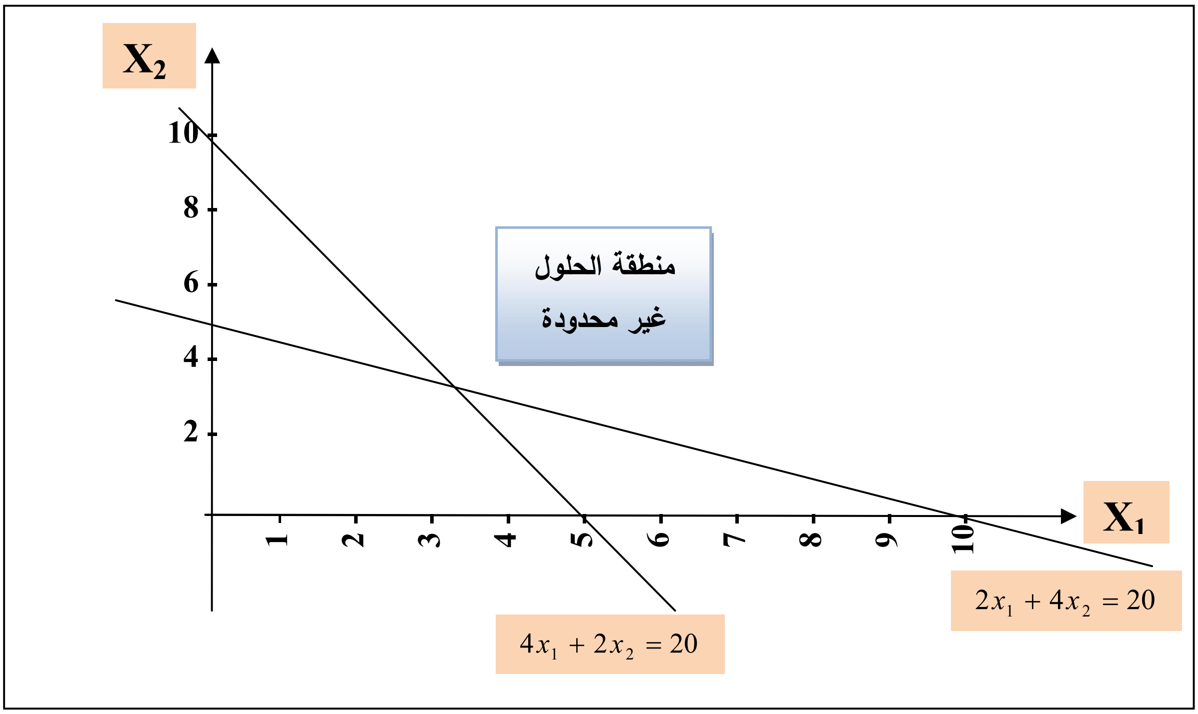
ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني(القيود أقل أو تساوي).

مثال رقم (05): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = 3x_1 + 5x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

- **حالة حياد أحد القيود:**

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

مثال رقم (06): افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

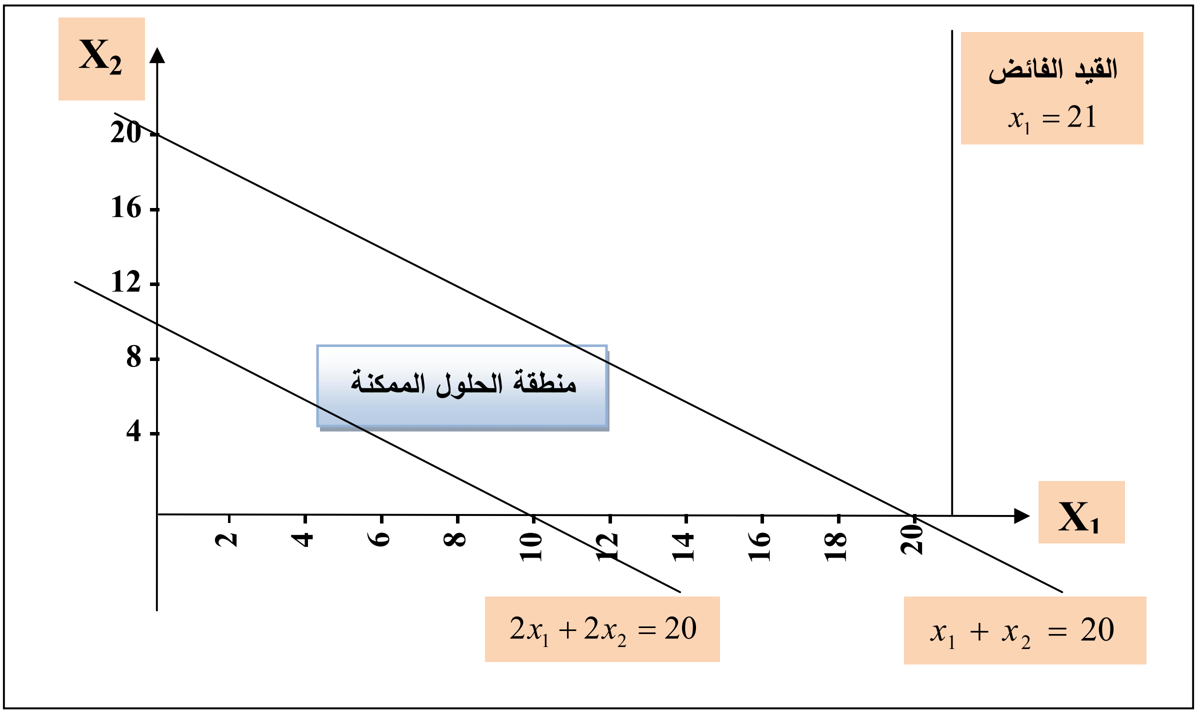
$$Max(z) = 5x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 20 \\ x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

V-3- تمارين مقترحة: باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لبرامج الخطية التالية

$$\begin{aligned}&2.Min(z)=80x_1+60x_2\\&s/c\\&\begin{cases}18x_1+12x_2\geq 180\\6x_1+9x_2\leq 162\\5x_1+10x_2\geq 110\end{cases}\\&x_1\geq 0;x_2\geq 0\end{aligned}$$	$$\begin{aligned}&1.Max(z)=15x_1+12x_2\\&s/c\\&\begin{cases}3x_1+6x_2\leq 54\\6x_1+3x_2\leq 48\\9x_1+9x_2\leq 90\end{cases}\\&x_1\geq 0;x_2\geq 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&4.Max(z)=3x_1+6x_2\\&s/c\\&\begin{cases}x_1+x_2\geq 12\\3x_1+4x_2\leq 24\end{cases}\\&x_1\geq 0;x_2\geq 0\end{aligned}$$	$$\begin{aligned}&3.Max(z)=2x_1+4x_2\\&s/c\\&\begin{cases}x_1\geq 7\\x_2\leq 11\end{cases}\\&x_1\geq 0;x_2\geq 0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&6.Max(z)=x_1+2x_2\\&s/c\\&\begin{cases}1{,}5x_1+3x_2\leq 15\\x_1\leq 7\\x_2\leq 3\end{cases}\\&x_1\geq 0;x_2\geq 0\end{aligned}$$	$$\begin{aligned}&5.Max(z)=9x_1+2x_2\\&s/c\\&\begin{cases}x_1+x_2\leq 10\\2x_1+x_2\leq 12\\x_1\leq 14\end{cases}\\&x_1\geq 0;x_2\geq 0\end{aligned}$$

الفصل الثالث

البرمجة الخطية وطريقة السمبليكس (Simplex)

تعرفنا في الفصل السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها المؤسسات تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار.لذلك لا بد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل من طريقة الحل البياني.

طريقة السمبليكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية[1].

تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الإمكانات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.

I- آلية عمل طريقة السمبليكس:

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في مشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طرقة أخرى المسماة بالسمبليكس التي ابتكرها دانزاك (Geroge Dantzig) عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود[2].

I-1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية (القياسية):

قبل الحل بطريقة النموذج بطريقة السمبليكس، وتحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، علينا أولاً معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها.

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 53.

[2]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 45.

I-1-1-الصيغة القانونية والمختلطة للبرنامج الخطي[1]:

- **الصيغة القانونية:**

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية وهي حسب الحالة كما يلي:

أ. **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي[2]:

$$Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + ...C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ...a_{in}x_n \le b_i \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; ....; x_n \ge 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(z) = C'X$$
$$s/c$$
$$\{AX \le B$$
$$X \ge 0$$

حيث: C' يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر عن شعاع الثوابت .

---

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 41.

[2]- J.M.Boussard, J. J.Daudin ," **la programmation linéaire dans les modèles de production**",Masson , Paris, 1998 . P 27 .

ب. **حالة التدنئة:** فحتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة ؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$Min(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots a_{in}x_n \geq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots\dots; x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Min(z) = C'X$$
$$s/c$$
$$\{AX \geq B$$
$$X \geq 0$$

- **الصيغة المختلطة:** وشروط هذه الصيغة:
  - أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل تعظيم أو تدنئة؛
  - أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو هيأة معادلة أي مساواة؛
  - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة المختلطة تكتب كما يلي[1]:

[1]- Mustapha Nabil ," **recherche opérationnelle et *Mathématiques appliqués* a la gestion des entreprises**",Dunod, France,1985 , p 31 .

$$Min\_or\_Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \geq,=,\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots a_{2n}x_n \geq,=,\leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots a_{in}x_n \geq,=,\leq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots a_{mn}x_n \geq,=,\leq b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots; x_n \geq 0$$

I-1- 2– الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي:

وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبليكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالأتي[1]:

- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز (S_i ;i=1,2,……m) ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الفجوة موارد غير مستخدمة مثل الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المحزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلا كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " ويرمز له بالرمز (S_i ;i=1,2,……m) ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 70 .

(Artificielle) إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، ويظهر المتغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما **المتغير الاصطناعي** فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة(M+)عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (M−). فمثلا إذا القيد على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M الكبيرة أو Big−M)[1].

- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

إشارة القيد	الإجراء على القيد	دالة الهدف تدنئة (Min)	دالة الهدف تعظيم (Max)
اقل من أو يساوي	$+1S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر من أو يساوي	$-1S_i+1A_i$	$1S_i+MA_i$	$1S_i-MA_i$
يساوي	$+1A_i$	$+MA_i$	$-MA_i$

مثال رقم (01): أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الأتي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص54 .

الحل: القيد الأول عبارة عن قيد مساواة إذن:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 10$$

القيد الثاني يحمل إشارة أكبر من أو يساوي إذن:

$$x_2 + x_3 \geq 4 \Rightarrow x_2 + x_3 - S_1 + A_2 = 4$$

القيد الثالث حمل إشارة أصغر من أو يساوي ومنه:

$$x_1 + x_3 \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_3 + S_2 = 5$$

أما دالة الهدف تصبح على النحو التالي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

I-2- إعداد جدول الحل الأولي:

تبدأ الطريقة السمبليكس بحل الأولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية (مثل) مساوية لـ(0)، ينتج عن هذا الحل الإعتيادي ربحاً مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل[1] .

تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل الصيغة النموذجية من حالة دالة التعظيم في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي:

[1] -P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean ," **Algorithmes et pratique de programmation linéaire**", édition telmic, Paris, 1980. P 17 .

T_1	C_J	C_1	C_2	....	C_n	0	0	....	0	
CB	XB	X_1	X_2	....	X_n	S_1	S_2	....	S_m	B
0	S_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	1	0	....	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	0	1	....	0	b_2
:	:	:	:	....	:	:	:	....	:	:
0	S_i	a_{i1}	a_{i2}	....	a_{in}	0	0	....	0	b_i
:	:	:	:	....	:	:	:	....	:	:
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	0	0	....	1	b_m
Z_J		0	0	....	0	0	0	....	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		C_1	C_2	....	C_n	0	0	....	0	Z=0

حيث:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$
$$Z = CB'B$$

نلاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة (1) من أعمدة المصفوفة الأحادية، وتكون في الجدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات لإصطناعية أو هم معا، وفي المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، وتحل محلها متغيرات أخرى.

وفي هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير(عمود الثوابت)، أي : $\left(S_1 = b_1 ; S_2 = b_2 ;\ldots\ldots\ldots \;\ldots\ldots\ldots\; S_m = b_m\right)$

أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي معدومة، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

مثال رقم (02): أوجد الصيغة النموذجية والجدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

✓ الصيغة النموذجية:

تصبح القيود أعلاه كما يأتي:

القيد الأول: $2x_1 + x_2 + S_1 = 100$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 + S_2 = 240$

وهذا يعني بأن عدد ساعات المستخدمة كانت أقل من 100 ساعة بالنسبة للقيد الأول و240 ساعة بالنسبة للقيد الثاني.

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

✓ جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج:

المتغيرات الغير الأساسية

T_1	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_1	2	1	1	0	100
0	S_2	4	3	0	1	240
Z_J		0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		7	5	0	0	Z=0

المتغيرات الأساسية

يطلق على الحل الإبتدائي مصطلح " الحل الممكن الأساسي " ويوصف بالصيغة الآتية:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$$

هذا هو الحل الممكن الأساسي بصيغة الأعمدة.

المتغيرات التي يطلق عليها **بالمتغيرات الأساسية** في البرمجة الخطية هي (S_1,S_2)، أما المتغيرات التي لا يضمها مزيج الحل أو غير الأساسية (X_1,X_2) في مثالنا يطلق عليها **المتغيرات غير الأساسية**.

I-3- إجراءات الحل بطريقة السمبليكس:

إنطلاقا من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني " الجدول الثاني" وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس وكذلك **عنصر الإرتكاز**.

سندرج فيما يأتي الخطوات ثم نشرحها بدقة ونطبقها لإستكمال الجدول الثاني والثالث للحل[1]:

- **الخطوة (01):** تحديد المتغير الذي سيدخل مزيج الحل لاحقاً، و إحدى الطرق للقيام بذلك هو عن طريق تحديد العمود، ويتم على أساس قيم صف تقيم الحل $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة موجب في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري أو **بعمود عنصر الإرتكاز** (Pivot Column)، ومن ثم المتغير أكبر قيمة موجبة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ في الجدول السابق، هذا يعني أننا سننتج الآن بعض المنتجات التي ستسهم في تحقيق أعظم ربح إضافي للوحدة الواحدة. من جدول الحل الأولي للمثال السابق رقم (02) نجد أن قيمة المتغير (X_1) في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ تساوي (7) وهي أعلى قيمة موجبة وهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) لمزيج الحل سيساهم بزيادة الربح بمقدار (7) دينار، أما المتغيرة (X_2) فإن القيمة المقابلة له في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ كانت (5) دينار فقط، أما المتغيرتين $(S_1 ;S_2)$ فكانت قيمها المقابلة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ صفر لكل منهما، وهذا يعني أن دخولهما مزيج الحل سوف لن يضيف أي شيء للربح المتوقع، وعليه سنختار المتغير (X_1) ليكن المتغير الداخل، وعليه سيكون العمود الذي يحتويه هو عمود الإرتكاز؛
- **الخطوة (02):** نحدد المتغير الذي سيتم استبداله (المتغير الخارج)، لإننا إخترنا متغير جديد سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد أي من المتغيرات الأساسية الحالية ينبغي أن يخرج ويتم إنجاز هذه الخطوة عن طريق قسمة قيم عمود الكميات (B) على قيم عمود المحور الإتكاز (القيم فقط الموجبة والغير معدومة) الذي تم إختياره في الخطورة (01)، الصف الذي يحقق أقل قيمة موجبة سيتم إستبداله في الجدول اللاحق(هذا الرقم الأقل قيمة موجبة بالمناسبة يعطي أكبر رقم من الوحدات للمتغير الذي سيحل محله في الحل)، ويشار إلى هذا الصف بـ الصف المحور أو **صف الإرتكاز** (Pivot Row)، الرقم الذي يقع ضمن نقطة تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز يشار له بـ العنصر المحوري أو **عنصر الإرتكاز** (Pivot Number)، طالما أن المتغير (X_1) سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيتم إستبداله سيكون هناك عددا من المتغيرات الأساسية بقدر عدد القيود في مشكلة البرمجة الخطية، وعليه فإما (S_1) أو (S_2)

---

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص ص : 153-157.

سيخرج من جدول الحل ليحل محله المتغير الداخل (X_1) كمتغير أساسي ولتحديد صف الإرتكاز، فإننا سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min \left\{ \frac{100}{2} = 50 \,, \frac{240}{4} = 60 \right\} = Min \{50 \,, 60\} = 50$$

الرقم الموجب الأصغر يشير إلى أعظم رقم من الوحدات من (X_1) يمكن إنتاجها دون أن ينتهك أي من القيود الأصلية، إنها أيضا تشير إلى أن الصف الإرتكاز سيكون الصف الأول الذي يقابل النسبة (50)، هذا يعني أن بأن (S_1) سيكون المتغير الذي سيتم استبداله في هذه الخطوة، أما عنصر الإرتكاز هو الرقم الذي يقع عند تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز وهو يقع في الصف الأول والعمود الأول وهو (2).

ولتوضيح ما سبق في الخطوة رقم (01) و (02) في الجدول الأولي السابق كالآتي:

عنصر الإرتكاز

T_1	C_J	7	5	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_1}$
0	S_1	2	1	1	0	100	50
0	S_2	4	3	0	1	240	60
Z_J		0	0	0	0		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		7	5	0	0	Z=0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

- **الخطوة (03):** يتم تعديل جدول الأولي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحل الأولي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحل الأولي، وتتلخص إجراءات تكوين الجدول الجديد بما يلي:

- تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، ويسمى الصف الناتج بصف العمل (Working Row)
من المثال السابق لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{2}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{0}{2};\frac{100}{2}\right) = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right)$$

ستظهر القيم الجديدة لصف الإرتكاز بأكمله في الجدول الجديد، ونلاحظ بأن (X_1) سيظهر في مزيج الحل وأنه سيتم إنتاج (50) وحدة من (X_1)، وهذا سيحقق حتماً ربحاً أكبر من (0) كما هو الحال في جدول الحل الأولي.

T_2	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50

الصف الأول الجديد

- تحتسب قيم الصفوف الأخرى باستخدام القواعد التالية:

قيم الصف الجديدة = القيم الحالية (القديمة) للصف – (الرقم المناظر للرقم الإرتكاز X الرقم المقابل في صف العمل). أما الرقم المناظر للرقم الإرتكاز هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى الرقم الإرتكاز.

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$S_2 = (4;3;0;1;240) - 4\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) = (0;1;-2;1;40)$$

T_2	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_2	0	1	-2	1	40

الصف الثاني الجديد

- **الخطوة (04):** وبعد الإنتهاء من عملية الحساب قيم الصفوف تتم عملية اختبار أمثلية الحل، لكن لابد من إجراء الخطوة الأخيرة لإكمال الجدول الثاني واختبار الحل هو إستخراج تأثير دالة الهدف وتتضمن هذه الخطوة حساب قيم كلا من صف (Z_J) و ($\Delta Z = C_J - Z_J$)، ونكرر بأن دخول (Z_J) في عمود الكميات يعطينا إجمالي الربح الذي يتحقق من الحل الحالي، أما بقية

قيم (Z_J)، فإنها تمثل إجمالي الربح المتحقق من إضافة وحدة واحدة من كل متغير إلى الحل الجديد وتحتسب قيم (Z_J) كما يأتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z_J = \begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} = 350$$

وسيتم وضع قيم (Z_J) و (ΔZ)، في الجدول الحل الثاني وكما مبين في الجدول التالي:

T_2	C_J	7	5	0	0		
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**	$\frac{B}{X_2}$
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	100
0	S_2	0	1	-2	1	40	40
Z_J		7	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	**Z=350**	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	$\frac{3}{2}$	$\frac{-7}{2}$	**0**		

إن الحل الحالي يشير إلى أن الشركة حتى الآن ستقوم بإنتاج 50 وحدة من (X_1)، و(0) وحدة من (X_2)، لتحقق ربحاً مقداره 350 دينار، (X_1) هو متغير أساسي، أما (X_2) فهو متغير غير أساسي، أما المتغيرة الفجوة (S_2) تبين كمية الوقت غير المستخدم، وهو أحد المتغيرات الأساسية وقيمته هي 40، وهذا يعني أن 40 ساعة لا تزال موجودة، أما المتغيرة الفجوة (S_1) فهو متغير غير أساسي لذا فإن عدد الساعات يساوي (0).

أن الصف (ΔZ) مهماً بالنسبة لنا لسببين: الأول إنه يشير إذا ما كان الحل الحالي هو **الحل الأمثل** أم لا ؟ فعندما لا تكون هناك قيم موجبة في الصف، فهذا يعني الوصول للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، وفي مثالنا ومن خلال القيم الموجودة في الصف (ΔZ) في الجدول نجد بأن قيم (X_1)

و(S_1) و(S_2) سالبة أو صفرية، أما قيمة (X_2) فهي $(\frac{3}{2})$ وهذا يعني بأن صافي الربح يمكن أن يزيد بمقدار $(\frac{3}{2})$ لكل وحدة مضافة على الحل الحالي.

ولأن قيمة (X_1) في صف (ΔZ) تساوي الصفر، فهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) سوف لن يضيف شيئاً إلى الربح، لذا فإنه سيبقى دون تغيير.

طالما أنه لم تكن جميع القيم في الصف (ΔZ) في الجدول الأخير سالبة أو معدومة، لذا فإن هذا الجدول لا يمثل جدول الحل الأمثل، وينبغي أن نعيد خطوات السمبليكس السابقة الذكر.

سيدخل المتغير (X_2) الحل اللاحق لأنه يحمل أكبر قيمة موجبة في الصف (ΔZ) بل إنه القيمة الوحيدة في الصف، هذا يعني أنه سيكون عمود (X_2) هو عمود الإرتكاز، تتضمن الخطوة الموالية تحديد صف الإرتكاز وستقسم قيم عمود الكميات المتاحة على عمود الإرتكاز القيمة الأصغر هي لـ(S_2)، وعليه سيغادر عمود المتغيرات الأساسية ليحل محله المتغير (X_2)، وقيمة عنصر الإرتكاز هي (01) كما هي موضحة في الجدول السابق.

- **الخطوة (05):** تطوير جدول الحل الثالث ويتم استبدال صف الإرتكاز من خلال قسمة كل رقم فيه على العنصر الإرتكاز هو (1)، ولأن القسمة على (1) لذا سوف لن تتغير القيم، وعليه ستكون قيم المتغير الداخل في جدول الحل الجديد لذي سيحل محل المتغير الخارج (S_2).

T_3	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
5	X_2	0	1	−2	1	40

القيم الجديدة لصف (X_1) يمكن حسابها الآن كما يأتي:

$$X_1=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right)-\frac{1}{2}\left(0;1;-2;1;40\right)=\left(1;0;\frac{3}{2};\frac{-1}{2};30\right)$$

وهكذا ستكون قيم صف (X_1) والتي ستظهر في الجدول الحل الثالث مبينة بالآتي:

T_3	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
7	X_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30

وأخيراً صفي تحسب في الجدول الثالث كما يأتي:

$$Z_J=CB'X_JS_J$$

$$Z_J = (7 \quad 5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 5)\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 410$$

ومنه جدول الحل الثالث هو كالآتي:

T_3	C_J	**7**	**5**	**0**	**0**	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**
7	X_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30
5	X_2	0	1	-2	1	40
Z_J		7	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	**Z=410**
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \leq 0$

بما أن (ΔZ) في الجدول الحل الثالث سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 30; X_2 = 40; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 410$$

وعادة يحتمل أن تكون هناك أخطاء رياضية عند المرور بخطوات السمبليكس المتعددة وعليه ستكون فكرة جيدة التحقق من الحل النهائي الذي توصلت إليه، ويمكن أن يتم ذلك في جزء عن طريق النظر إلى القيود ودالة الهدف .

القيد الأول: محقق تماما

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \Rightarrow 2(30) + 40 = 100$$

القيد الثاني: محقق تماماً

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240 \Rightarrow 4(30) + 3(40) = 240$$

دالة الهدف: الربح

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 = 7(30) + 5(40) = 410$$

II- تطبيق طريقة السمبليكس على مشكلة التدنئة أو التقليل:

في حالة التدنئة تكون القيود من النوع أكبر أو تساوي فتطرح متغيرات الفجوة من الطرف الأيسر وذلك للايفاء بشرط الصيغة النموذجية، ولهذا السبب يستعان بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية تضاف إلى النموذج بعد طرح المتغيرات الفجوة وذلك لإمكانية الحصول على الحل الممكن وكذلك عندما تكون القيود من نوع مساواة تضاف المتغيرات الإصطناعية لنفس السبب، ولقد سبق لنا في هذا الفصل شرح كيف يتم معاملات المتغيرات الاصطناعية لإيجاد الصيغة النموذجية.

وبعد الحصول على الحل الممكن، يجب التخلص من هذه المتغيرات (الإصطناعية) وإبعادها عن جداول السمبليكس، لأن بقاءها في مراحل حل السمبليكس هو علامة غير صحيحة للحصول على الحل الأمثل أو بصيغة أخرى عند بقائها لا يمكن الحصول على الحل الأمثل[1].

تشبه مشكلات التقليل إلى حد بعيد مشكلات التعظيم التي تناولناها أيضا في هذا الفصل، الفرق بينهما يكمن في صف (ΔZ) طالما أن هدفنا الآن هو تقليل التكاليف، فإن المتغير الجديدة الذي سيدخل إلى جدول الحل (عمود الإرتكاز) سيكون المتغير الذي يمثل **أكبر قيمة بإشارة سالبة** في الصف (ΔZ)، وهكذا فإننا سنختار المتغير الذي يقلل التكاليف بأكبر قدر ممكن، ويتم الوصول للحل الأمثل في مشكلات التقليل عندما تكون جميع القيم في صف (ΔZ) **موجبة أو معدومة** تماماً عكس ما هو عليه في حالات التعظيم، جميع خطوات السمبليكس الأخرى كما سنراها لاحقاً ستبقى كما في حالات التعظيم.

وهناك طريقتان للتخلص من المتغيرات الاصطناعية:

- ✓ طريقة (M) الكبيرة (Big–M)؛
- ✓ طريقة المرحلتين (Two–Phase).

II-1- طريقة (M) الكبيرة (Big–M):

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق الطريقة السمبليكس بأسلوب (M) الكبيرة على مشكلة التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من السلع[2].

مثال رقم (03): تنتج مؤسسة لصناعة الإلكترونيات نوعين من المنتجات هما : A وB ، يتطلب إنتاج كل منتج المرور في مرحلتين، ويوجد لدى الشركة على الأقل (6) ساعات يومياً لأعمال المرحلة الأولى، ولا يقل عن (4) ساعات في اليوم الواحد مخصصة لأعمال المرحلة الثانية، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتجين، بالإضافة إلى تكلفة إنتاج كل منتج.

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 67 .

[2] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 157 .

المنتج	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	التكلفة
A	1	1	3
B	3	1	4

المطلوب: نفترض أن الشركة ترغب في تخفيض تكاليفها الكلية، ما هي الكميات التي تنتجها من كل نوع.

الحل: يتم أولاً بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، وعلى النحو الآتي:

X_1: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج A.

X_2: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج B.

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 3x_2 - S_1 + A_1 = 6$

القيد الثاني: $x_1 + x_2 - S_2 + A_2 = 4$

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، والمتغيرات الاصطناعية تضاف في حالة (Min) وبمعامل (M) وهو عدد كبير جداً، وتطرح في حالة (Max)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: تكوين جدول الحل الأساسي الأول وبنفس القواعد المشار إليها سابقا:

متغيرات الاصطناعية　　متغيرات الفجوة　　متغيرات القرار

T_1	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
M	A_1	1	3	−1	1	0	0	6	2
M	A_2	1	1	0	0	−1	1	4	4
Z_J		2M	4M	−M	M	−M	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		3−2M	4−4M	M	0	M	0	Z=10M	

يلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات الإصطناعية، نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \geq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_2) الذي قيمته في السطر الأخير المقابلة له تساوي (4−4M) وهي أعلى قيمة بإشارة سالبة في الصف (ΔZ) وبالتالي فإن (X_2) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود الإرتكاز كما مبين في الجدول أعلاه.

ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{6}{3}=2,\frac{4}{1}=4\right\}=Min\{2,4\}=2$$

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (2) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (3) هو العنصر الإرتكاز.

نقوم بإجراء التعديل الأول عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1=\left(\frac{1}{3};\frac{3}{3};\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{0}{3};\frac{0}{3};\frac{6}{3}\right)=\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)$$

تكوين قيم الصف الثاني (A_2):

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$A_2=(1;1;0;0;-1;1;4)-1\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)=\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};\frac{-1}{3};-1;1;2\right)$$

يتم احتساب قيم صف (Z_J) كما يلتي:

$$Z_J=CB'X_JS_JA_J$$

$$Z_J=(4\quad M)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & 1\end{pmatrix}=\left(\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}\quad 4\quad \frac{-4}{3}+\frac{M}{3}\quad \frac{4}{3}-\frac{M}{3}\quad -M\quad M\right)$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z=CB'B=(4\quad M)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=8+2M$$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي:

T_2	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
4	X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2	6
M	A_2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-1	1	2	3
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	$\frac{-4}{3}+\frac{M}{3}$	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	−M	M		
$\Delta Z=C_J-Z_J$		$\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$	0	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	$\frac{-4}{3}+\frac{4M}{3}$	M	0	Z=8+2M	

نختبر أمثلية الحل في جدول الثاني فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير (X_1)، ويكون المتغير الداخل (X_1)، وعموده هو عمود الإرتكاز ثم نحدد المتغيرة الخارج من الحل الأساسي كما مر سابقاً فيكون (A_2) وصفه هو صف الإرتكاز، ويكون الرقم $\left(\frac{2}{3}\right)$ هو عنصر الإرتكاز، وبناء على هذا تتم عملية إعادة بناء الجدول الجديد ويكون على الشكل التالي:

T_3	C_J	3	4	0	M	0	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
4	X_2	0	1	−0,5	0,5	0,5	−0,5	**1**
3	X_1	1	0	0,5	−0,5	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	**3**
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	−0,5	0,5	−2,5	2,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0,5**	**M−0,5**	**2,5**	**M−2,5**	**Z=13**

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \geq 0$

نقوم بتقييم الحل من خلال (ΔZ)، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل حل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

$$X_1 = 3; X_2 = 1; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 13$$

ملاحظة هامة:

- ✓ إذا خرجت متغيرة الإصطناعية من الأساس فيمكننا الاستغناء عن حساب عناصر عمود المتغيرة الإصطناعية التي خرجت لأنها لا يمكن أن تدخل إلى أساس مرة أخرى[1]؛
- ✓ تعطى الأولية الخروج من الأساس في حالة الانحلال (تعدد البدائل) لمتغيرة الإصطناعية.

II-2- طريقة المرحلتين (Two−Phase):

بعد أن لاحظنا تعقد العمليات الحسابية بعض الشيء في طريقة (M) الكبيرة وخاصة عندما تكون العمليات الحسابية يدوية، هناك طريقة أخرى أقل صعوبة مما في الطريقة السابقة وهي طريقة المرحلتين، يستعمل هذا الطريقة عندما تستعمل المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية بغية الحصول على الحل الممكن لهذه النماذج.

وتستخدم هذه الطريقة لإستبعاد أثر المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية والحصول على الحل الأمثل، وتكون هذه الطريقة على مرحلتين[2]:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 85 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

- **المرحلة الأولى: (Phase I)** وهنا تظهر دالة الهدف فقط بالمتغيرات الإصطناعية وبمعامل واحد وتستبعد المتغيرات الأخرى كافة من دالة الهدف (سواء أكانت متغيرات القرار أم متغيرات الفجوة)، هذا إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة، وتظهر المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف بمعاملات (-1) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، وكما يأتي:

$$Min\,(Z) = A_1 + A_2 + \dots\dots\dots\; \dots\dots + A_m$$
$$Max\,(Z) = -A_1 - A_2 - \dots\dots\dots\; \dots\dots - A_m$$

وتنتهي المرحلة الأولى في حالة (Min) أو (Max) عندما تساوي دالة الهدف صفر أي يوجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل)، أما في حالة عدم المساواة دالة الهدف للصفر في نهاية المرحلة الأولى فلا يوجد حل أمثل ولا وجد مرحلة ثانية[1].

- **المرحلة الثانية: (Phase II)** وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة و وهنا تظهر دالة الهدف على حقيقتها، أي بمعاملات المتغيرات القرار كما هي في النموذج، وتظهر متغيرات الفجوة بمعاملات أصفار وكما هي الحالة الطبيعية و على النحو الآتي:

$$Min\,(Z) = CX_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\; \dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\, 0S_m$$
$$Max\,(Z) = CX_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\; \dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\, 0S_m$$

وهنا يكمل الحل بجداول السمبلكس وكما مر بنا إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل.

مثال رقم (04): حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة المرحلتين

$$Min(z) = 2x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 3$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 - S_2 + A_2 = 6$

القيد الثالث: $x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$

المرحلة الأولى:

حل بدالة الهدف التالية: $Min(z) = A_1 + A_2$

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 147 .

T_1	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
1	A_1	3	1	−1	0	0	1	0	3	1
1	A_2	4	3	0	−1	0	0	1	6	$\frac{3}{2}$
0	S_3	1	2	0	0	1	0	0	3	3
Z_J		7	4	−1	−1	0	1	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		−7	−4	1	1	0	0	0	Z=9	

نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي:(X_1) والتي تخرج من الأساس هي: (A_1) وبإتباع نفس خطوات السمبليكس السابقة نقوم بإعداد الجدول الحل الأساسي الثاني:

T_2	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	3
1	A_2	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$\frac{6}{5}$
Z_J		0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	0	$\frac{-4}{3}$	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	Z=2	

نلاحظ من خلال الجدول وجود قيم سالبة أي مزال هناك فرص أخرى لتقليل من التكاليف، وأكبر قيمة سالبة هي للمتغير (X_2) وهي التي تدخل إلى الأساس، كما نلاحظ أيضا أن هناك متغيرتين مرشحتين للخروج وهما (A_2),(S_3) وهنا **تعطى أولوية الخروج للمتغيرة الإصطناعية** للتقريب الأكثر للحل، أي المتغيرة التي تخرج من الأساس هي (A_2) ومنه الجدول الحل الأساسي يكون كالآتي:

T_3	C_J	0	0	0	0	0	1	1	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B
0	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	1	-1	0
Z_J		0	0	0	0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	Z= 0

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ **و** $Z = 0$ **توجد مرحلة ثانية**

ننتقل إلى المرحلة الثانية، ويتم ذلك بحذف أعمدة معاملات المتغيرات الإصطناعية من جدول الحل الأخير من المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية: وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة وبدالة الهدف الأصلية (متغيرات القرار، ومتغيرات الفجوة) أي حذف المتغيرات الإصطناعية، أما الجدول الأول من المرحلة الثانية يتشكل بعد بإفراغ البيانات الجدول السابق فيه واختبار الحل.

دالة الهدف تكتب بشكل التالي :

$$Min(z) = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون الجدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_1	C_J	2	1	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
2	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
1	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	0
Z_J		2	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$Z = \frac{12}{5}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	**0**	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الأول من المرحلة الثانية هو جدول الحل الأمثل

وهنا تكون قيم الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = \frac{3}{5};\ X_2 = \frac{6}{5};\ S_1 = S_2 = S_3 = 0;\ Z = \frac{12}{5}$$

III- حالات ومشاكل خاصة عند الحل بطريقة السمبليكس:

إستعرضنا الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية، سنعود لوصف هذه الحالات عند الحل بطريقة السمبليكس:

III-1- حالة عدم وجود حل ممكن:

تحدث عدم إمكانية الحل عندما لا نجد حلا مرضيا لجميع القيود، ويمكن الإشارة إلى عدم إمكانية الحل بمجرد النظر إلى جدول الحل النهائي، إذ نجد فيه أن جميع القيم صف (ΔZ) نشير إلى الوصول للحل الأمثل، لكن نجد أنه لا يزال هناك متغير اصطناعي في الجدول أدناه جدول الحل النهائي لمشكلة برمجة خطية من نوع التدنئة الجدول مثالا عن مشكلة برمجة خطية لم تتم صياغتها بشكل صحيح، ربما تتضمن هذه المشكلات قيوداً متضاربة، عدم وجد حل ممكن يكون ممكناً لبقاء المتغير الاصطناعي في مزيج الحل، رغم أن جميع القيم في الصف (ΔZ) موجبة أو معدومة (وهو المعيار المعتمد في الوصول للحل الأمثل في حالة التدنئة، والمثال التالي يبن هذه الحالة.[1]

[1] صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 184.

مثال رقم (05): الجدول التالي يوضيح لنا حالة عدم إمكانية الحل.

T	C_J	5	8	0	0	M	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B
5	X_1	1	0	−2	3	−1	0	200
8	X_2	0	1	1	2	−2	0	100
M	A_2	0	0	0	−1	−1	1	20
Z_J		5	8	−2	31−M	−21−M	M	Z=1800+
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0**	**M−31**	**2M−21**	**0**	20M

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ وهو شرط الأمثلية وتوجد متغيرة اصطناعية (A_2) في مزيج الحل إذن حالة عدم وجود حل ممكن

III-2- عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الإرتكاز **أقل أو تساوي الصفر**، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت وعناصر عمود عنصر الإرتكاز.[1]

مثال رقم (06): الجدول الموالي يوضح خالة محدودية الحل

T_2	C_J	6	9	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_1}$
9	X_2	−1	1	2	0	30	−
0	S_2	0	0	−1	1	10	−
Z_J		−9	9	18	0	$Z = 270$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		15	**0**	−18	0		

يستحيل تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس لأن عمود الإرتكاز يحوي قيم سالبة ومعدومة .

عمود الإرتكاز

---

1. محمد راتول، مرجع سابق، ص 78.

يوضح الجدول الحل الثاني الذي تم إحتسابه لمشكلة تعظيم بإعتماد طريقة السمبليكس، وهو يشير إلى حالة عدم المحدودية، لا يمثل الحل أعلاه حلاً أمثلاً لأن (ΔZ) ليست جميعها سالبة أو معدومة، كما هو مطلوب للوصول إلى حل الأمثل في مشكلات التعظيم، والمتغير المرشح لدخول هو (X_1)، ولتحديد المتغير الذي سيغادر يجب قسمة قيم عمود الكميات على قيم عمود الإرتكاز ولكن قيم هذا الأخير سالبة ومعدومة وهي غير مقبولة، فإن ذلك يشير إلى عدم محدودية الحل.

III-3- حالة الإنحلال:

نكون أمام حالة الإنحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس (حيث تساوت النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي يدخل الأساس)، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس، وفي الحالتين نختار واحدة عشوائياً بسبب عدم وجود معيار محدد لتحديد المتغير الخارج أو الداخل للأساس، وعند استخدام طريقة الحل المبسطة قد تظهر حالة الإنحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف وتبق على حالها.[1]

مثال رقم (07): يبين الجدول الموالي مثالاً عن حالة الإنحلال في مشكلة التعظيم

T_2	C_J	5	8	2	0	0	0		
CB	**XB**	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	**B**	$\frac{B}{X_1}$
8	X_2	$\frac{1}{4}$	1	1	2	0	0	10	40
0	S_2	4	0	$\frac{1}{3}$	-1	1	0	20	5
0	S_3	2	0	2	$\frac{2}{5}$	0	1	10	5
Z_J		2	8	8	16	0	0	$Z = 80$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		3	**0**	**−6**	−16	0	0		

نجد أن أصغر القيم الموجبة من ناتج قسمة عمود الكميات على قيم عمود الإرتكاز متساوية لصفي S_1 و S_2 وهذا يشير إلى وجود حالة إنحلال .

عمود الإرتكاز

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص ص: 93-95 .

III-4- تعدد الحلول المثلى:

تعدد الحلول المثلى أو وجود أكثر من حل أمثل بديل يمكن معرفتها عندما نستخدم طريقة السمبليكس وذلك عن طريق إلقاء نظرة على الجدول النهائي، فإذا كانت قيم المتغيرات القرار في الصف (ΔZ) مساوي للصفر رغم عدم وجودها في مزيج الحل، فهذا يعني وجد أكثر من حل أمثل بديل[1].

مثال رقم (08): الجدول الموالي يبين الحل الأمثل لمشكلة التعظيم

T_3	C_J	2	1	1	0	−M	0	0		
CB	**XB**	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	S_2	S_3	**B**	$\frac{B}{X_3}$
2	X_1	1	2	0,5	0	0	0	0,25	4	8
0	S_2	0	0	−1	0	0	1	−0,5	12	−
0	S_1	0	6	0	1	−1	0	1	12	−
Z_J		2	4	1	0	0	0	0,5	$Z = 8$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	**−3**	**0**	0	−M	0	−0,5		

يتضح من جدول الحل الأمثل الأول بأن الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 4; X_2 = X_3 = 0; S_1 = S_2 = 12 ; S_3 = 0; Z = 8$$

من خلال ملاحظة قيم صف (ΔZ) يتبين بأن معامل (X_3) في الصف يساوي صفر، وهذا يعني إمكانية تكوين حل أمثل آخر بدخول (X_3) إلى الحل الأساسي وخروج (X_1)، ونحصل على حل أمثل آخر كما هو مبين في الجدول التالي:

T_4	C_J	2	1	1	0	−M	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	S_2	S_3	**B**
1	X_2	2	4	1	0	0	0	0,5	8
0	S_2	2	4	0	0	0	1	0	16
0	S_1	0	6	0	1	−1	0	0,5	12
Z_J		2	4	1	0	0	0	0,5	$Z = 8$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	**−3**	**0**	0	−M	0	−0,5	

نفس قيمة Z ، وهذا يدل عن حالة تعدد الحلول

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 187.

نلاحظ من جدول الحل الأمثل الثاني تحقق نفس قيمة (Z) في الجدول الحل الأمثل الأول مع تغير متغيرات الحل الأساسي التي أصبحت :

$$X_3 = 8 ; X_1 = X_2 = 0 ; S_1 = 12 ; S_2 = 16 ; S_3 = 0 ; Z = 8$$

IV- تمارين محلولة:

التمرين الأول: افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

المطلوب: 1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛ 2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين.	$Min(z) = 80x_1 + 60x_2$ s/c $\begin{cases} 18x_1 + 12x_2 \geq 180 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 162 \\ 5x_1 + 10x_2 = 110 \end{cases}$ $x_1 ; x_2 \geq 0$

حل التمرين الأول:

1. طريقة (M) الكبرى:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $18x_1 + 12x_2 - S_1 + A_1 = 180$

القيد الثاني: $6x_1 + 9x_2 + S_2 = 162$

القيد الثالث: $5x_1 + 10x_2 + A_2 = 110$

معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 80x_1 + 60x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	80	60	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
M	A_1	18	12	−1	1	0	0	180	10
0	S_2	6	9	0	0	1	0	162	27
M	A_2	5	10	0	0	0	1	110	22
Z_J		23M	22M	−M	M	0	M	Z=290M	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		80−23M	60−22M	M	0	0	0		

نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \geq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_1) هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (10) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (18) هو العنصر الإرتكاز. وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

T_2	C_J	80	60	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X2}$
80	X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	10	15
0	S_2	0	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	0	102	$\frac{102}{5}$
M	A_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	60	9
Z_J		80	$\left(\frac{160}{3}+\frac{20}{3}M\right)$	$\left(\frac{-40}{9}+\frac{5}{18}M\right)$	$\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$	0	M	Z=800+60M	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\left(\frac{20}{3}-\frac{20}{3}M\right)$	$\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$	$\left(\frac{-40}{9}+\frac{23}{18}M\right)$	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي (X_2)، أما المتغيرة الخارجة من الأساس (A_2) ويكون الجدول الثالث كالآتي:

T_3	C_J	80	60	0	M	0	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
80	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	1	0	57
60	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{24}$	0	1	9
Z_J		80	60	$\frac{-25}{6}$	$\frac{25}{6}$	0	M	Z=860
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{25}{6}$	$\left(M - \frac{25}{6}\right)$	0	$(M-1)$	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4; X_2 = 9; S_2 = 57; S_1 = S_3 = 0; Z = 860$$

2. طريقة المرحلتين:

المرحلة الأولى: لدينا دالة الهدف

$$Min(z) = A_1 + A_2$$

جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	0	0	0	1	0	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
1	A_1	18	12	−1	1	0	0	180	10
0	S_2	6	9	0	0	1	0	162	27
1	A_2	5	10	0	0	0	1	110	22
Z_J		23	22	−1	1	0	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		−23	−22	1	0	0	0	Z=290	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_2	C_J	0	0	0	1	0	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X2}$
0	X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	10	15
0	S_2	0	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	0	102	$\frac{102}{5}$
1	A_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	60	9
Z_J		0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	Z=60	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{23}{3}$	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (A_2)

T_3	C_J	0	0	0	1	0	1	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
0	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{10}$	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	1	$-\frac{3}{4}$	57
0	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{24}$	0	$\frac{3}{20}$	9
Z_J		0	0	0	0	0	0	Z=0
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	1	0	1	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ و $Z = 0$ توجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل).

المرحلة الثانية:

دالة الهدف تكتب بالشكل التالي:

$$Min(z) = 80x_1 + 60x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_3	C_J	80	60	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
80	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	0	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	1	57
60	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	0	9
Z_J		80	60	$\frac{-25}{6}$	0	Z=860
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{25}{6}$	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4 ; X_2 = 9 ; S_2 = 57 ; S_1 = S_3 = 0 ; Z = 860$$

التمرين الثاني: افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

المطلوب: 1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛ 2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين.	$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$ s/c $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $x_1 ; x_2 \geq 0$

حل التمرين الثاني:

1. طريقة (M) الكبرى:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $4x_1 + 6x_2 + S_1 = 24$

القيد الثاني: $5x_1 + 4x_2 - S_2 + A_1 = 20$

القيد الثالث: $x_2 + A_2 = 2$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	2	3	0	0	−M	−M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	4	6	1	0	0	0	24	4
−M	A_1	5	4	0	−1	1	0	20	5
−M	A_2	0	1	0	0	0	1	2	2
Z_J		−5M	−5M	0	M	−M	−M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		2+5M	3+5M	0	−M	0	0	Z=−22M	

نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التعظيم مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \leq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة موجبة في (ΔZ) وفي هذه الحالة المتغير (X_2) هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (2) وبذلك فإن (A_2) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (1) هو العنصر الإرتكاز.

وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

T_2	C_J	2	3	0	0	−M	−M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	4	0	1	0	0	−6	12	3
−M	A_1	5	0	0	−1	1	−4	12	$\frac{12}{5}$
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		−5M	3	0	M	−M	4M+3		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		2+5M	0	0	−M	0	−5M−3	Z=−12M+6	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_3	C_J	2	3	0	0	−M	−M		
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**B**	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-14}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
2	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{12}{5}$	−
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		2	3	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	$z=\frac{54}{5}$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{2}{5}$	$-M-\frac{2}{5}$	$-M-\frac{7}{5}$		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (S_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_4	C_J	2	3	0	0	−M	−M	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**B**
0	S_2	0	0	$\frac{4}{5}$	1	−1	$\frac{-7}{2}$	3
2	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{-3}{2}$	3
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2
Z_J		2	3	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$z=12$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	−M	−M	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3;\ X_2 = 2;\ S_1 = 0;\ S_2 = 3;\ Z = 12$$

2. طريقة المرحلتين:

المرحلة الأولى: لدينا دالة الهدف

$$Max(z) = -A_1 - A_2$$

الجدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	0	0	0	0	−1	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	4	6	1	0	0	0	24	4
−1	A_1	5	4	0	−1	1	0	20	5
−1	A_2	0	1	0	0	0	1	2	2
Z_J		−5	−5	0	1	−1	−1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		5	5	0	−1	0	0	Z=−22	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (A_2)

T_2	C_J	0	0	0	0	−1	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	4	0	1	0	0	−6	12	3
−1	A_1	5	0	0	−1	1	−4	12	$\frac{12}{5}$
0	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		−5	0	0	1	−1	4		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		5	0	0	−1	0	−5	Z=−12	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_3	C_J	0	0	0	0	−1	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-14}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
0	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{12}{5}$	−
0	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		0	0	0	0	0	0	$z = 0$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	0	−1	−1		

بما أن: $\Delta Z \leq 0$ و $Z = 0$ توجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل).

المرحلة الثانية: دالة الهدف تكتب بالشكل التالي

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_1	C_J	2	3	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
2	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{12}{5}$	−
3	X_2	0	1	0	0	2	−
Z_J		2	3	0	$\frac{-2}{5}$	$z = \frac{54}{5}$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{2}{5}$		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (S_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_2	C_J	2	3	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_1	0	0	$\frac{4}{5}$	1	3
2	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	3
3	X_2	0	1	0	0	2
Z_J		2	3	$\frac{1}{2}$	0	$z=12$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثاني من المرحلة الثانية هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3;\ X_2 = 2;\ S_1 = 0;\ S_2 = 3;\ Z = 12$$

IV- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي الأول للبرامج التالية

$1.Max(z)=20x_1+15x_2$ s/c $\begin{cases} 7x_1+2x_2\geq 14 \\ 8x_1+16x_2\leq 16 \\ 2x_1+5x_2\geq 10 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$2.Min(z)=x_1-x_2-3x_3$ s/c $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3\geq 1 \\ 4x_1-2x_2+x_3\geq -2 \\ 3x_1+x_3=2 \end{cases}$ $x_1;x_2;x_3\geq 0$

التمرين الثاني: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة (Méthode Simplexe)

$2.Max(z)=16x_1+15x_2$ s/c $\begin{cases} 40x_1+31x_2\leq 124 \\ -x_1+x_2\leq 1 \\ x_1\leq 3 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$1.Max(z)=100x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases} 8x_1+2x_2\leq 40 \\ 6x_1+9x_2\leq 108 \\ 8x_1+6x_2\leq 96 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$

4.بين أن منطقة الحل للنموذج التالي غير محدودة: $$Max(z)=3x_1+x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+x_2\le 2 \\ x_1\le 3 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$	$$3.Max(z)=200x_1+370x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 300 \\ x_1+x_2\le 190 \\ x_1\le 110 \\ x_2\le 130 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية:

1. بطريقة M الكبرى ***BIG (M)***: $$Min(z)=10x_1+30x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 6 \\ 6x_1+x_2\ge 6 \\ x_2\ge 2 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$	2. بطريقة M الكبرى و **طريقة المرحلتين**: $$Min(z)=4x_1+x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 4 \\ 3x_1+x_2=3 \\ 4x_1+3x_2\ge 6 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$

التمرين الرابع: بين أن النموذج التالي لا يحتوي على حل أمثل بإستخدام طريقة المرحلتين:

$$Max(z)=3x_1+2x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\le 20 \\ 7x_1+10x_2\ge 70 \\ 8x_1+5x_2\ge 40 \end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$