حلول تمارين سلسلة المنفعة العددية، مع ملخص موجز حول نظرية سلوك المستهلك.

1- ملخص موجز حول نظرية سلوك المستهلك:

بعدما تكلمنا عن توازن السوق وكيف يتأثر بالتدخل الحكومي من خلال مجموعة من التمارين، سنتكلم على موضوع جديد يتعلق بنظرية سلوك المستهلك، وقبل البدء بالجانب التطبيقي لابد من التطرق لبعض المفاهيم.

1- ماهية نظرية سلوك المستهلك: نظرية سلوك المستهلك تهتم بدراسة سلوك الفرد الإستهلاكي، والمقصود بالفرد قد يكون شخص معنوي أو شخص طبيعي)، والفرضية الأساسية التي ينطلق منها تحليل ودراسة سلوك المستهلك هي أن:

- سلوكه عقلاني ورشيد للحصول على نتائج موضوعية وإمكانية تعميم هاته النتائج على جميع المستهلكين في ظل نفس الظروف.
- إنفاق كامل دخله على السلع والخدمات التي تحقق له أكبر إشباع ممكن (أكبر نفع ممكن).
- معرفة المستهلك بأسعار السلع والخدمات.

2- ماهية محددات سلوك المستهلك: كل مستهلك يرغب في تحقيق أقصى إشباع ممكن (أقصى نفع) في حدود دخله والأسعار السائدة، إذن محددات سلوك المستهلك تكمن في: - الرغبة، - القدرة(الدخل والسعر)، - تفضيلات المستهلك من السلع والخدمات (الذوق).

3- المنفعة :(**Utility**) : **رمزها**(U) ، وهي مقدار الإشباع المتحقق نتيجة لاستهلاك كمية محددة من سلعة ما أو خدمة ما.

4- المنفعة الكلية :(**Total Utility**) : **رمزها**(Ut) ، وهي مجموع المنافع التي يحصل عليها المستهلك جراء استهلاكه كميات متتالية من سلعة ما أو خدمة ما خلال فترة زمنية محددة.

5- المنفعة الحدية:(**Marginal Utility**): **رمزها**(Um) ، وهي مقدار التغير بالزيادة أو النقصان في المنفعة الكلية كنتيجة لزيادة الإستهلاك من السلعة أو الخدمة بمقدار وحدة إضافية.

– مثال: الجدول التالي يوضح المنفعة الكلية التي يجنيها مستهلك ما جراء استهلاكه أكواب متتالية من الماء.

الكمية (Q)	0	1	2	3	4	5
المنفعة الكلية (Ut)	0	18	32	44	44	31

نلاحظ أن إستهلاك الكوب الأول يعطينا 18 وحدة منفعة، واستهلاك الكوب الثاني يعطينا 32 وحدة منفعة، والثالث 44 وحدة منفعة والرابع أيضا 44 وحدة منفعة (الكوب الرابع لم يزد أي نفع إضافي عن الكوب الثالث)، والكوب الخامس تسبب في انخفاض النفع إلى 31 وحدة منفعة، ولمعرفة درجة تغير النفع (المنفعة الكلية)، أي هل أن النفع بعد كل وحدة مستهلكة (كوب) إضافية يتزايد أم يتناقص؟، نقوم بحساب المنفعة الحدية التي تقيس درجة التغير في المنفعة الكلية الناتج عن زيادة الإستهلاك بوحدة إضافية واحدة.

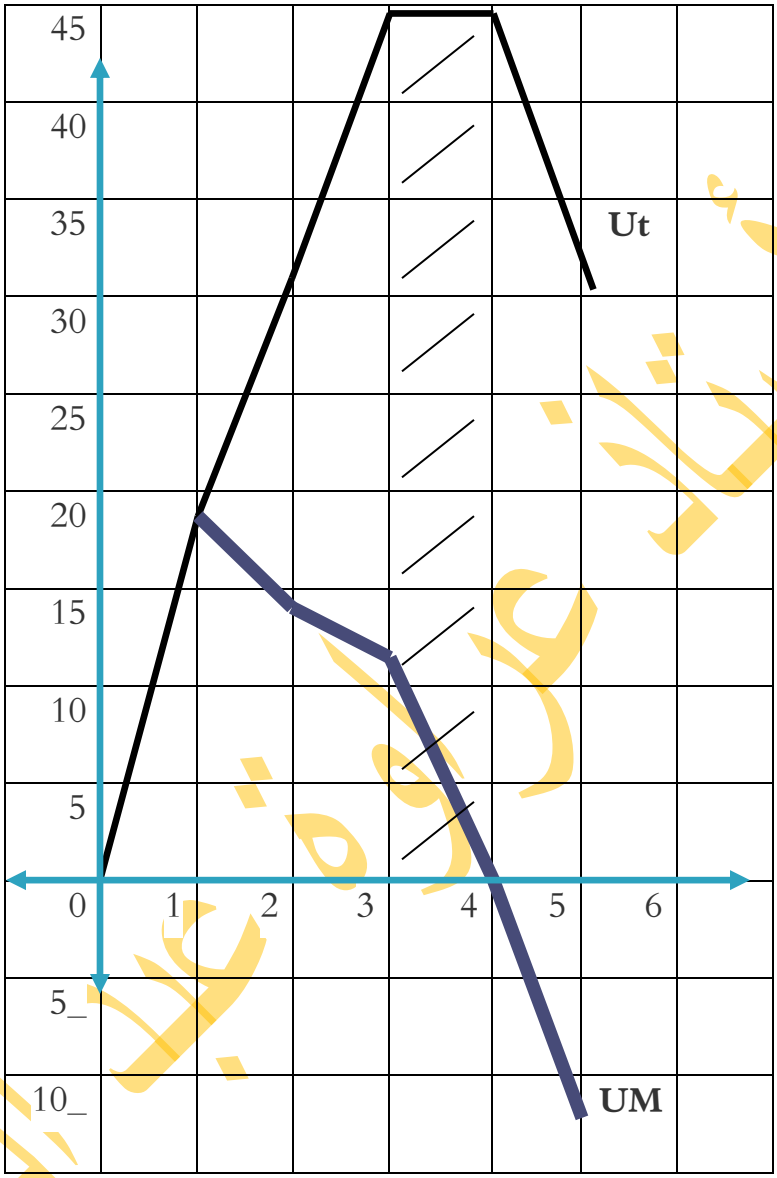
الكمية (Q)	0	1	2	3	4	5
المنفعة الكلية (Ut)	0	18	32	44	44	31
المنفعة الحدية: $Um = \frac{\Delta Ut}{\Delta Q}$	\	18	14	12	00	13 _

6– قانون تناقص المنفعة الحدية: نلاحظ أن إستهلاك الكوب الأول يعطي للمستهلك 18منفعة، والكوب الأول والثاني يعطيان معا منفعة أكبر لكن منفعة الكوب الثاني أقل من منفعة الكوب الأول، ومنفعة الثالث أقل من الثاني وهكذا حتى تنعدم المنفعة الحدية، وهذا ما يسمى بقانون تناقص المنفعة الحدية، وفي مثالنا هذا المنفعة الحدية تتزايد عند استهلاك الوحدة الأولى (18وحدة)، ثم تبدأ بالتناقص (من 18إلى 14إلى 12) حتى تنعدم عند تناول الكوب الرابع (00)، وهذا ما تفسيره أنه كلما زاد عدد الوحدات المستهلكة كلما زادت المنفعة الكلية زيادة متناقصة (الزيادة من 18 وحدة منفعة إلى 32) أكبر من (الزيادة من 32 إلى 44 وحدة منفعة)، أي أن هناك تناقص في منفعة الوحدة الإضافية (تناقص المنفعة الحدية من وحدة مستهلكة إلى أخرى حتى تنعدم)، (قانون تناقص المنفعة الحدية)، والجدول أسفله يوضح هذا القانون.

جدول يوضح العلاقة بين المنفعة الكلية والمنفعة الحدية. (المثال السابق.)

الكمية (Q)	المنفعة الكلية (Ut)	المنفعة الحدية: $Um = \frac{\Delta Ut}{\Delta Q}$
0	0	
1	18 : تتزايد من 0 إلى 18وحدة منفعة بمعدل متزايد قدره 18 وحدة منفعة.	18 وحدة منفعة: الكوب الأول يحقق نفع كبير
2	32 : تتزايد من 18 إلى 32 بمعدل متناقص قدره 14 وحدة. (أقل من 18.)	14 وحدة: الكوب 2 يحقق نفع أقل من الأول.
3	44: تتزايد من 32 إلى 44 بمعدل متناقص قدره 12 وحدة. (أقل من 14.)	12 وحدة: الكوب 3 يحقق نفع أقل من الثاني.
4	44: ثبات النفع. (وهو أقصى إشباع يحققه المستهلك، وكل استهلاك إضافي يؤدي إلى تناقص النفع، والمستهلك الرشيد يتوقف هنا عن الإستهلاك.).	00 وحدة نفع، ((Ut) عظمى تصل أقصى إشباع عندما تكون المنفعة الحدية مساوية للصفر.
5	31: نلاحظ أن النفع تناقص من 44 إلى 31 رغم زيادة الإستهلاك. (مستهلك غير رشيد.)	13_ وحدة منفعة: المنفعة الحدية سالبة تعني أن المنفعة الكلية متناقصة.

وفيما يلي تمثيل بياني للمنفعة الكلية والمنفعة الحدية والعلاقة بينهما على نفس المعلم.



من خلال المنحنى نلاحظ: المرحلة الأولى (استهلاك الوحدة الأولى): تزايد المنفعة الكلية والمنفعة الحدية بمعدل ثابت.

المرحلة الثانية (استهلاك الوحدة الثانية والثالثة): عندما تبدأ المنفعة الكلية في التزايد بمعدل متناقص، تبدأ المنفعة الحدية في التناقص.

المرحلة الثالثة (استهلاك الوحدة 4): ثبات المنفعة الكلية بعد بلوغها أقصى نقطة (درجة الإشباع) وانعدام المنفعة الحدية، (المستهلك الرشيد يتوقف هنا.).

المرحلة الأخيرة (استهلاك الوحدة الخامسة): تناقص المنفعة الكلية وتصبح المنفعة الحدية سالبة، وتصرف المستهلك هنا غير رشيد وغير عقلاني.

- نقطة الإشباع هي أعلى نقطة على منحنى المنفعة الكلية ويقابلها النقطة الصفرية على منحنى المنفعة الحدية.

- المنطقة الإقتصادية المفضلة هي المحصورة بين الوحدة الثالثة والوحدة الرابعة، لأنه في هاته المنطقة يحقق المستهلك أقصى إشباع.

الأستاذ عزوز عبد العزيز

7- توازن المستهلك (ترشيد سلوكه الإنفاقي لتحقيق أقصى إشباع في حدود دخله والأسعار السائدة):

أ- توازن المستهلك في حالة سلعة واحدة: يحقق المستهلك أقصى إشباع باستهلاكه وحدات من سلعة واحدة أو خدمة واحدة إذا تحقق الشرط التالي:

المنفعة الحدية المكتسبة (التغير في المنفعة الكلية الناتج عن زيادة الإستهلاك بوحدة واحدة) تساوي المنفعة الحدية المضحى بها (تعبر عن المبلغ المدفوع فعلا للحصول على وحدة واحدة من السلعة أو الخدمة، أي ثمن الوحدة مضروبا في منفعة الوحدة النقدية). راجع كتاب التحليل الإقتصادي الجزئي لمحمد فرحي، ص 26-30.

ب- توازن المستهلك في حالة أكثر من سلعة: وهنا يبحث المستهلك عن السلع أو الخدمات التي تحقق له أقصى إشباع في حدود دخله والأسعار السائدة، ويوجد ثلاث طرق كمية (عددية)، وهي طريقة شرط المنافع، طريقة التعويض، طريقة مضاعف لاغرانج.

ب-1: طريقة شرط المنافع: الشرط الأول: تساوي المنافع الحدية للوحدات النقدية (أي منفعة الوحدة النقدية المنفقة على السلعة **X** تساوي منفعة الوحدة النقدية المنفقة على السلعة **Y**.)

$$\frac{Umx}{px} = \frac{Umy}{py}$$

الشرط الثاني: الكميتان اللذان حققا الشرط الأول أيضا يجب أن يحققان شرط قيد الدخل: R=XPx+YPy

ب-2: طريقة التعويض: تتطلب وجود سلعتين فقط، وتعتمد على قيد الدخل، كما يلي:

$$\mathbf{R=Xpx+Ypy} \Rightarrow x = \frac{\mathbf{R-Ypy}}{\mathbf{Px}} \ldots\ldots(1)$$

نعوض قيمة (X) في دالة المنفعة الكلية لتصبح (Ut) بمجهول واحد، ولتحديد الكميتين اللتين تحققان توازن المستهلك يتطلب شرطين:

ب-1-أ: الشرط اللازم: المشتق الأول لدالة المنفعة يساوي الصفر، ثم نستخرج قيمة المجهول مثلا (Y)، ونعوضها في المعادلة رقم (1) لإيجاد قيمة X، أو العكس.

ب-1-ب: الشرط الكافي: المشتق الثاني لدالة المنفعة أقل من الصفر، فنقول أن الكميتين (X) و (Y) تحققان توازن المستهلك.

ب-3: طريقة مضاعف لاغرانج: طريقة مضاعف لاقرانج، تعتمد على الخطوات التالية:

أ- كتابة معادلة قيد الدخل: **R=Xpx+Ypy**، وبطرح الطرف الثاني من الطرف الأول تصبح: **R-Xpx-Ypy=0**

ب- نقوم بضرب قيد الدخل في معامل موجب يسمى λ فتصبح الدالة: $\lambda\ (\mathbf{R-Xpx-Ypy}) = 0$

ج- إيجاد دالة الهدف (دالة لاغرانج)، وهي تشمل دالة المنفعة الكلية المراد تعظيمها، مضافا إليها قيد الميزانية مضروبا في المعامل λ، فتصبح دالة لاغرانج من الصيغة: $\mathbf{L = Ut + \lambda\ (R - Xpx - Ypy)}$

د- لإيجاد الكميات من السلع التي تحقق أقصى إشباع للمستهلك باتباع طريقة لاغرانج يجب توفر شرطين، شرط لازم وآخر كافي:

- الشرط الأول: (الشرط اللازم)، جعل المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لكل متغير($X,Y,Z, \dots \lambda$) تساوي الصفر.

$$\frac{\delta L}{\delta x} = 0 \qquad \frac{\delta L}{\delta y} = 0 \qquad \frac{\delta L}{\delta z} = 0 \qquad \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0,$$

- الشرط الكافي: المحدد الهيسي Δ أكبر من الصفر (سلع زوجية)، وأقل من الصفر (سلع فردية)، وهو عبارة عن المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاغرانج بالنسبة لكل متغير($X,Y,Z, \dots \lambda$)،

ففي الصف الأول نقوم باشتقاق المشتق الأول لدالة لاغرانج بالنسبة (X)، حيث أشتقه مرة ثانية بالنسبة للمتغيرات: X، Y، ...، وλ.

وفي الصف الثاني نقوم باشتقاق المشتق الأول لدالة لاغرانج بالنسبة (Y)، حيث أشتقه مرة ثانية بالنسبة للمتغيرات: X، Y، ...، وλ.

وفي الصف الثالث نقوم باشتقاق المشتق الأول لدالة لاغرانج بالنسبة (λ)، حيث أشتقه مرة ثانية بالنسبة للمتغيرات: X، Y، ...، وλ.

ثم نقوم بحل المصفوفة، ففي حالة السلع الزوجية يتحقق الشرط الكافي لتعظيم منفعة المستهلك إذا كانت إشارة المحدد الهيسي موجبة،

وفي حالة السلع الفردية (3، 5، ...) يتحقق الشرط الكافي لتعظيم منفعة المستهلك إذا كانت إشارة المحدد الهيسي سالبة.

$$\Delta = \begin{vmatrix} L''xx & L''xy & L''x\lambda \\ L''yx & L''yy & L''y\lambda \\ L''\lambda x & L''\lambda y & L''\lambda\lambda \end{vmatrix} =$$

2- حلول تمارين سلسلة المنفعة العددية:

حل التمرين الأول:

أنظر الصفحتين 1 و2.

- مؤيدو فكرة قياس المنفعة عدديا مجموعة من الإقتصاديون وعلى رأسهم: ليون راس، ألفرد مارشال، حيث يرون بإمكانية قياس المنفعة عدديا بوحدات تسمى "وحدات منفعة" أرجع إلى محمد فرحي، التحليل الإقتصادي الجزئي، ص23.

حل التمرين الثاني.

1- حساب المنفعة العددية المكتسبة: وهي عبارة عن التغير في المنفعة الكلية (ΔUt) الناتج عن زيادة الإستهلاك بوحدة واحدة (ΔQ).

$$Um = \frac{\delta Ut}{\delta Q} = \frac{\Delta Ut}{\Delta Q} = \frac{Ut2 - Ut1}{Q2 - Q1} = \frac{122 - 110}{4 - 3} = 12$$

ونفس الطريقة عند الإنتقال من 4 إلى 5، وهكذا حتى آخر تغير من 9 إلى 10، وبعد الإنتهاء يصبح الجدول المعطى كما يلي:

Q	3	4	5	6	7	8	9	10
المنفعة الكلية(Ut)	110	122	132	140	146	150	150	148
المنفعة الحدية(Um)		12	10	08	06	04	00	_02

2- أنظر التمثيل البياني للمنفعة الحدية والمنفعة الكلية (بنفس الطريقة في المثال السابق).

العلاقة بين منحنى المنفعة الكلية ومنحنى المنفعة الحدية: من خلال المنحنى نلاحظ:

المرحلة الأولى (استهلاك الوحدة الثالثة): تزايد المنفعة الكلية.

المرحلة الثانية (استهلاك الوحدة الرابعة حتى الوحدة الثامنة): تبدأ المنفعة الكلية في التزايد بمعدل متناقص، وتبدأ المنفعة الحدية في التناقص.

المرحلة الثالثة (استهلاك الوحدة 9): ثبات المنفعة الكلية بعد بلوغها أقصى نقطة (الإشباع) وانعدام المنفعة الحدية، (المستهلك الرشيد يتوقف.

المرحلة الأخيرة (استهلاك الوحدة العاشرة): تناقص المنفعة الكلية وتصبح المنفعة الحدية سالبة، وتصرف المستهلك هنا غير رشيد.

- نقطة الإشباع هي أعلى نقطة على منحنى المنفعة الكلية (عند الوحدة 9)، ويقابلها النقطة الصفرية على منحنى المنفعة الحدية.

- المنطقة الإقتصادية المفضلة هي المحصورة بين الوحدة الثامنة والوحدة التاسعة، لأنه في هاته المنطقة يحقق المستهلك أقصى إشباع.

حل التمرين الثالث:

الجدول أسفله يوضح المنفعة الكلية الناجمة عن إستهلاك سلعة واحدة، حيث: منفعة الوحدة النقدية هي وحدتي (2) منفعة، وسعر السلعة هو 5 وحدة نقدية، أي:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{Umx}{px} = 2 \\ Px = 5 \end{array}\right\}$$

ومنه: المنفعة الحدية المضحى بها هي: $Umx = 2px = 10$

إذن يصبح الجدول كما يلي:

Q	1	2	3	4	5	6
المنفعة الحدية المكتسبة(Um)	15	13	10	6	2	0
المنفعة الكلية المكتسبة (Ut) **مجموع المنافع الحدية المكتسبة**	15	15 + 13 = 28	28 + 10 = 38	38 + 6 = 44	44 + 2 = 46	46 + 0 = 46
منفعة حدية مضحى بها(Um)	10	10	10	10	10	10

توازن المستهلك في حالة سلعة واحدة يتحقق عندما تكون المنفعة الحدية المكتسبة تساوي المنفعة الحدية المضحى بها(ثمن الوحدة مضروبا في منفعة الوحدة الواحدة)، ويتحقق هذا الشرط عند: **Q=3**

حل التمرين الرابع

لدينا: دخل المستهلك: **R=12**، **Px=2**، **Py=1**، والجدول أسفله يوضح المنفعة الكلية المكتسبة جراء استهلاك وحدات متتالية من السلعتين.

المطلوب: 1- إيجاد الكميات المستهلكة من السلعتين لتحقيق أكبر إشباع ممكن (تحققان توازن المستهلك).

في حالة سلعتين يتحقق أكبر إشباع ممكن إذا تحقق الشرطين التاليين: (هاته الطريقة تسمى طريقة شرط المنافع.)

الشرط الأول: تساوي المنافع الحدية للوحدات النقدية (أي منفعة الوحدة النقدية المنفقة على السلعة **X** تساوي منفعة الوحدة النقدية المنفقة على السلعة **Y**.)

$$\frac{Umx}{px} = \frac{Umy}{py}$$

الشرط الثاني: الكميتان اللتان حققا الشرط الأول أيضا يجب أن يحققان شرط قيد الدخل: **R=XPx+YPy**، وعليه لابد وأن يتضمن الجدول المعطى المنافع الحدية للوحدات النقدية.

الكميات المستهلكة Q	المنفعة الكلية Utx	المنفعة الحدية Umx	$\frac{Umx}{px}$ المنفعة الحدية للوحدة النقدية	المنفعة الكلية Uty	المنفعة الحدية Umy	$\frac{Umy}{py}$ المنفعة الحدية للوحدة النقدية
1	16	16	08	11	11	11
2	30	14	07	21	10	10
3	42	12	06	30	09	09
4	52	10	05	38	08	08
5	60	08	04	45	07	07
6	66	06	03	51	06	06
7	70	04	02	56	05	05
8	72	02	01	60	04	04

الشرط الأول يتحقق في عدة حالات كما في الجدول أعلاه بألوان مختلفة:

الحالة الأولى: **الشرط الأول:** $\frac{Umx}{Px} = \frac{Umy}{Py} = 8$ يتحقق عند:

X=1 (المنفعة الحدية للوحدة النقدية المنفقة على **X** = (8) تقابلها وحدة (1)مستهلكة من **X**)، أنظر الجدول السابق.

و **Y=4** (المنفعة الحدية للوحدة النقدية المنفقة على **X** = (8) تقابلها (4) وحدات مستهلكة من **y**)، أنظر الجدول السابق.

الشرط الثاني: تحقيق شرط قيد الدخل: **R=XPx+YPy ⇔ 1*2+4*1=6≠ 12** (فائض، المستهلك هنا لا ينفق دخله كاملا)

الحالة الثانية: الشرط الأول: $\frac{Umx}{Px} = \frac{Umy}{Py} = 7$ يتحقق عند:

X=2 (المنفعة الحدية للوحدة النقدية المنفقة على **X** = (7) تقابلها وحدتين (2)مستهلكتين من **X**)، أنظر الجدول السابق.

و **Y=5** (المنفعة الحدية للوحدة النقدية المنفقة على **X** = (7) تقابلها (5) وحدات مستهلكة من **y**)، أنظر الجدول السابق.

الشرط الثاني: تحقيق شرط قيد الدخل: **R=XPx+YPy ⇔ 2*2+5*1=9≠ 12** (فائض، المستهلك هنا لا ينفق دخله كاملا)

الحالة الثالثة: الشرط الأول: $\frac{Umx}{Px} = \frac{Umy}{Py} = 6$ يتحقق عند:

X=3 (المنفعة الحدية للوحدة النقدية المنفقة على **X** = (6) تقابلها (3) وحدات مستهلكة من **X**)، أنظر الجدول السابق.

و **Y=6** (المنفعة الحدية للوحدة النقدية المنفقة على **X** = (6) تقابلها (6) وحدات مستهلكة من **y**)، أنظر الجدول السابق.

الشرط الثاني: تحقيق شرط قيد الدخل: **R=XPx+YPy ⇔ 3*2+6*1=12=R** (المستهلك هنا ينفق دخله كاملا)، توازن.

إذن الثنائية (**X=3** و **Y=6**) تحققان الشرط الأول والشرط الثاني وبالتالي تحققان أكبر إشباع للمستهلك (تحققان توازن المستهلك).

الحالة الرابعة: $\frac{Umx}{Px} = \frac{Umy}{Py} = 5$، **عند:** (X=4,Y=7) **4*2+7*1=15 لا تحقق قيد الدخل** (R<15)، **عجز**.

الحالة الخامسة: $\frac{Umx}{Px} = \frac{Umy}{Py} = 4$، **عند** (**X=5**, **Y= 8**) **5*2+8*1=18 لا تحقق قيد الدخل** (R<18)، **عجز**.

2- توضيح طريقة إنفاق المستهلك لدخله:

المستهلك الرشيد يحاول تحقيق أقصى إشباع في حدود دخله، وبالتالي فهو يفاضل كل مرة بين المنافع الحدية للوحدات النقدية المنفقة على السلعتين (**X** و **Y**)، ويقتني الوحدة التي تحقق أكبر نفع، والجدول التالي يوضح ذلك.

كيفية إنفاق المستهلك لدخله؟					R=12 Px=2 Py=1
الرصيد = R-(xpx+ypy)	تكلفة الوحدة المختارة من Y	تكلفة الوحدة المختارة من X	كيفية الإختيار: يقارن بين المنافع الحدية للوحدات النقدية ويأخذ الوحدة الأكثر نفعا من (X أو Y)	Umy / Py	Umx / Px
11	**01**		**منفعة وحدة من Y (11) أكبر من منفعة وحدة من X (8)، فيقتني المستهلك وحدة من Y.**	**11**	**8**
10	**01**		**10 أكبر نفع من 8، يقتني وحدة من Y.**	**10**	**7**
09	**01**		**09 أكبر نفع من 8، يقتني وحدة من Y.**	**09**	**6**
06	**01**	**02**	**(8 منفعة من Y = 8 منفعة من X)، فيقتني وحدة من Y ووحدة من X.**	**08**	**5**
03	**01**	**02**	**(7 منفعة من Y = 7 منفعة من X)، فيقتني وحدة من Y ووحدة من X.**	**07**	**4**
00	**01**	**02**	**(6 منفعة من Y = 6 منفعة من X)، فيقتني وحدة من Y ووحدة من X.**	**06**	**3**
	06	03	**عدد الوحدات المستهلكة من X و Y.** ⬅	05	2
			نلاحظ أن المستهلك قد إستهلك كامل دخله على 03 وحدات من X و06 وحدات من Y، وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها في السؤال الأول، وهاتين الكميتين تحققان أيضا شرط قيد الدخل:	04	1
			R=Xpx+Ypy 3*2+6*1=12		

3- إشتقاق منحنى الطلب الفردي على السلعة Y، بعد انخفاض سعرها من 01 إلى 0,5:

بعد تغير سعر السلعة **Y** فإن هذا يؤثر على طريقة إنفاق الدخل، وبالتالي يؤثر في كمية التوازن التي كانت (**X=3, Y=1**)، وتصبح طريقة إنفاق الدخل كما هي مبينة في الجدول أسفله:

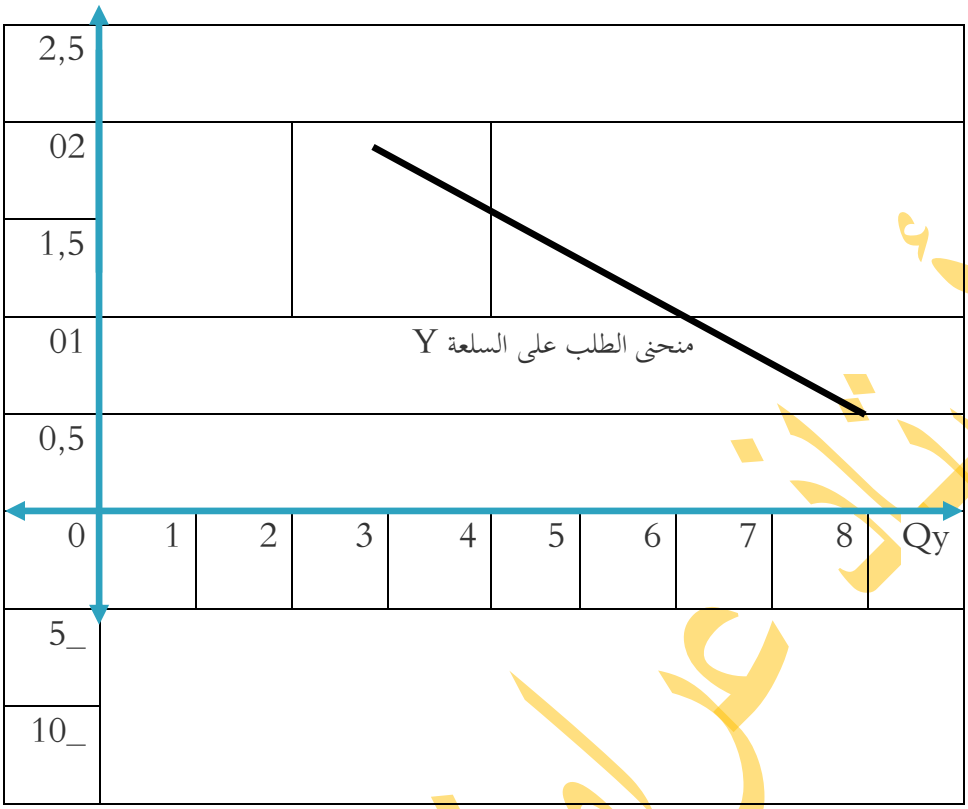
كيفية إنفاق المستهلك لدخله؟			R=12 Px=2 Py=0,5	
الرصيد = R-(xpx+ypy)	**تكلفة الوحدة المختارة من** Y	**تكلفة الوحدة المختارة من** X	$\frac{Umy}{Py}$	$\frac{Umx}{Px}$
11,5	0,5	_____	22	8
11	0,5	_____	20	7
10,5	0,5	_____	18	6
10	0,5	_____	16	5
09,5	0,5	_____	14	4
09	0,5	_____	12	3
08,5	0,5	_____	10	2
06	0,5	02	08	1
	08	**01**	**عدد الوحدات المستهلكة من X و Y.**	

عندما كان: **Py=1**، كانت كمية المستهلكة من **Y** هي: **Y=6**.

عندما إنخفض السعر إلى: **Py=0,5**، إرتفعت الكمية إلى **Y=8**. وعليه يصبح جدول الطلب الفردي كما يلي:

السعر	**الكمية المطلوبة من Y**
1	6
0,5	8

ويصبح منحنى الطلب كما يلي:



حل التمرين الخامس.

لدينا دالة المنفعة الكلية للسلعة **X** معطاة كما يلي: $Utx = 96Q - 4Q^2$ / $Px = 8$ / $\frac{Umx}{Px} = 4$

كيف يحقق المستهلك توازنه؟، في حالة سلعة واحدة فإن شرط التوازن هو: المنفعة الحدية المضحى بها تساوي المنفعة الحدية المكتسبة.

1- المنفعة الحدية المضحى بها هي: $Umx = 4(Px) = 4*8 = 32$ .....(1) ⇦ $\frac{Umx}{Px} = 4$

2- دالة المنفعة الحدية المكتسبة: $Um = \frac{\delta Utx}{Q} = 96 - 8Q$ .....(2)

شرط التوازن في حالة سلعة واحدة: المعادلة (1) = المعادلة (2) أي: $96-8Q = 32 \Rightarrow Q = 8$

إذن يحقق المستهلك توازنه باستهلاكه الكمية $Q = 8$

حل التمرين السادس.

لدينا دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما من الشكل التالي: $Ut = (X+2)(Y+1)$

1- حساب مقدار المنفعة الكلية: عند استهلاك ($X=13$, $Y=5$)، بالتعويض في Ut نجد:

$$Ut = (X+2)(Y+1) = (13+2)(5+1) = 90$$

2- التوليفة (الثنائية السلعية) التي تحقق للمستهلك أقصى إشباع، حيث: $R=51$ $Px=2$ $Py=5$

2-1: طريقة مضاعف لاقرانج، تعتمد على الخطوات التالية:

أ- كتابة معادلة قيد الدخل: $R=Xpx+Ypy$، وبطرح الطرف الثاني من الطرف الأول تصبح: $R-Xpx-Ypy=0$

ب- نقوم بضرب قيد الدخل في معامل موجب يسمى λ فتصبح الدالة: $\lambda\ (R-Xpx-Ypy) = 0$

ج- إيجاد دالة الهدف (دالة لاغرانج)، وهي تشمل دالة المنفعة الكلية المراد تعظيمها، مضافا إليها قيد الميزانية مضروبا في المعامل λ، فتصبح دالة لاغرانج من الصيغة: $L = Ut + \lambda\ (R-Xpx-Ypy)$

د- لإيجاد الكميات من السلع التي تحقق أقصى إشباع للمستهلك باتباع طريقة لاغرانج يجب توفر شرطين، شرط لازم وآخر كافي:

- الشرط الأول: (الشرط اللازم)، جعل المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لكل متغير($X,Y,Z,\ldots\lambda$) تساوي الصفر.

$$\frac{\delta L}{\delta X}=0 \qquad \frac{\delta L}{\delta Y}=0 \qquad \frac{\delta L}{\delta Z}=0 \qquad \frac{\delta L}{\delta \lambda}=0,$$

- الشرط الكافي: المحدد الهيسي Δ أكبر من الصفر (سلع زوجية)، وأقل من الصفر (سلع فردية).

نتبع هاته المراحل في الحل:

أ- إيجاد دالة لاغرانج: تبسيط الدالة أولا: $Ut = (X+2)(Y+1) = XY+X+2Y+2$

$$L = Ut + \lambda\ (R-Xpx-Ypy)$$

$$L = XY + X + 2Y + 2 + \lambda\ (51 - 2X - 5Y)$$

ب– الشرط اللازم: المشتقات الجزئية تساوي الصفر:

$$\frac{\delta L}{\delta X}=0 \Leftrightarrow Y+1-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{Y+1}{2} \quad .....(1)$$

$$\frac{\delta L}{\delta y}=0 \Leftrightarrow X+2-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{X+2}{5} \quad .....(2)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda}=0 \Leftrightarrow 51-2X-5Y=0 \quad .....(3)$$

من (1) و (2) وبمأن الطرف الأول متساوي فإن: $\frac{Y+1}{2}=\frac{X+2}{5} \Rightarrow 5(Y+1)=2(X+2) \Leftrightarrow 5Y+5=2X+4$

ومنه: $Y=\frac{2X-1}{5}$ .....(4)

بتعويض (4) في (3) نجد: $51-2X-5\left(\frac{2X-1}{5}\right)=0 \Leftrightarrow 52-4X=0 \Rightarrow X=13$

ومنه: $Y=\left(\frac{25}{5}\right)=5$

ج– الشرط الكافي: المحدد الهيسي Δ موجب: العمود الأول موجب الإشارة (+)، العمود الثاني سالب الإشارة (–) والعمود الثالث موجب الإشارة (+).

+	-	+

$$\Delta=\begin{vmatrix} L''xx & L''xy & L''x\lambda \\ L''yx & L''yy & L''y\lambda \\ L''\lambda x & L''\lambda y & L''\lambda\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}=+0\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & -0 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=0-1[(1)(0)-(-2)(-5)]+(-2)[(1)(-5)-(-2)(0)]$$

$$=+10+10=20>0$$

نتيجة: المحدد الهيسي يساوي 20 أكبر من الصفر، إذن الثنائية $(X=13)$ و $(Y=5)$ هي التوليفة المثلى التي تحقق توازن المستهلك.

2-2:طريقة التعويض:

$\mathbf{Ut= (X + 2)(Y + 1) = XY+X+2Y+2}$

$$\boldsymbol{R = Xpx + Ypy \Leftrightarrow 51 = 2x + 5y \Rightarrow x = \frac{51-5y}{2} \dots\dots\dots (1)}$$

بتعويض (1) في (Ut) نجد:

$$Ut = \left(\frac{51 - 5y}{2}\right)y + \frac{51 - 5y}{2} + 2y + 2$$

$$Ut = (51 - 5y)y + 51 - 5y + 4y + 4 = 51y - 5y^2 + 55 - y$$

$$Ut = -5y^2 + 50y + 55$$

الشرط اللازم: مشتق (Ut) يساوي الصفر: $\boldsymbol{\frac{\delta Ut}{\delta y} = 0 \Leftrightarrow -10Y + 50 = 0}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow Y = 5 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)}$$

وبتعويض (2) في (1) نجد: $\boldsymbol{x = \frac{51-5(5)}{2} = 13}$

الشرط الكافي: المشتق الثاني ل **Ut** أصغر من الصفر.

$$\boldsymbol{\delta\left(\frac{\delta Ut}{\delta y}\right) < 0 \Leftrightarrow -10 < 0}$$

إذن الثنائية **(X=13)** و **(Y=5)** تحققان توازن المستهلك، وهي نفس النتائج المحصل عليها بطريقة لاغرانج.

3- إيجاد المنفعة الحدية لكل سلعة عند التوازن، حيث: **(X=12,5 , Y=4,8)**.

أ- المنفعة الحدية للسلعة (**X**): $\boldsymbol{Umx = \frac{\delta Ut}{\delta x} = Y + 1 = 5 + 1 = 6}$

ب- المنفعة الحدية للسلعة (**Y**): $\boldsymbol{Umy = \frac{\delta Ut}{\delta y} = X + 2 = 13 + 2 = 15}$

الأستاذ عبد العزيز

حل التمرين السابع.

لدينا دالة المنفعة الكلية من الشكل: $Ut = X^{1/2} * Y^{1/4}$ ، $R=10$, $Px=1$, $Py=2$

1- حساب الكمية التي تعظم منفعة المستهلك (تحقق توازنه)، (تحقق أقصى إشباع).

طريقة مضاعف لاغرانج:

أ- صياغة دالة الهدف:

$$L = Ut + \lambda\ (R - Xpx - Ypy)$$

$$L = X^{1/2} * Y^{1/4} + \lambda\ (10 - X - 2Y)$$

ب- الشرط اللازم: المشتقات الجزئية تساوي الصفر:

$$\frac{\delta L}{X} = 0 \Leftrightarrow = {}^{1}/_{2}\, X^{-1/2} * Y^{1/4} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{Y^{1/4}}{2\,X^{1/2}} \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\delta L}{y} = 0 \Leftrightarrow = {}^{1}/_{4}\, X^{1/2} * Y^{-3/4} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{X^{1/2}}{8Y^{3/4}} \ldots\ldots(2$$

$$\frac{\delta L}{\lambda} = 0 \qquad \Leftrightarrow 10 - X - 2Y = 0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

من (1) و (2) الطرفين الأولين متساويين، إذن الطرفين الثانيتين أيضا متساويتين:

$$\frac{Y^{1/4}}{2\,X^{1/2}} = \frac{X^{1/2}}{8Y^{3/4}} \Rightarrow Y^{1/4}\,(8Y^{3/4}) = 2\,X^{1/2}\,(X^{1/2}) \Leftrightarrow 8Y = 2X$$

ومنه: $X = 4Y \quad \ldots\ldots\ldots(4)$

بتعويض (4) في (3) نجد: $10 - 4Y - 2Y = 0 \Leftrightarrow 10 - 6Y = 0 \Rightarrow Y = 1,67$

ومنه: $X = 4\,(1,67) = 6,68$

ج- الشرط الكافي: المحدد الهيسي Δ موجب: نتبع نفس طريقة التمرين السادس.

2- إيجاد مقدار المنفعة الحدية لكل وحدة نقدية: أي: $\frac{Umx}{Px}$ و $\frac{Umy}{Py}$

لدينا: $$Umx = \frac{\delta Ut}{\delta x} = {}^{1}/_{2}\, X^{-1/2} * Y^{1/4} = \frac{Y^{1/4}}{2\,X^{1/2}} = \frac{(1{,}67)^{(\frac{1}{4})}}{2(\,6{,}68)^{(\frac{1}{2})}} = 0{,}17$$

إذن مقدار المنفعة الحدية للدينار المنفق على السلعة **X** هو: $$\frac{Umx}{Px} = \frac{0{,}17}{1} = 0{,}17$$

و $$Umy = \frac{\delta Ut}{\delta y} = \; = {}^{1}/_{4}\, X^{1/2} * Y^{-3/4} = \frac{X^{1/2}}{4Y^{3/4}} = \frac{(6{,}68)^{(\frac{1}{2})}}{4(1{,}67)^{(\frac{3}{4})}} = 0{,}62$$

إذن مقدار المنفعة الحدية للدينار المنفق على السلعة **y** هو: $$\frac{Umy}{Py} = \frac{0{,}62}{2} = 0{,}31$$

3- إيجاد دالتي الطلب على السلعتين: نتبع طريقة مضاعف لاغرانج:

$$L = Ut + \lambda\,(R - Xpx - Ypy) = X^{1/2} * Y^{1/4} + \lambda\,(10 - X - 2Y)$$

الشرط اللازم: المشتقات الجزئية تساوي الصفر:

$$\frac{\delta L}{X} = 0 \Leftrightarrow \; = {}^{1}/_{2}\, X^{-1/2} * Y^{1/4} - \lambda\, px = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{Y^{1/4}}{2px.X^{1/2}} \;\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\delta L}{y} = 0 \Leftrightarrow \; = {}^{1}/_{4}\, X^{1/2} * Y^{-3/4} - \lambda\, py = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{X^{1/2}}{4py.Y^{3/4}} \;\ldots\ldots(2$$

$$\frac{\delta L}{\lambda} = 0 \qquad \Leftrightarrow R - Xpx - Ypy = 0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

من (1) و (2) نجد:

$$\frac{Y^{1/4}}{2px.X^{1/2}} = \frac{X^{1/2}}{4py.Y^{3/4}} \Rightarrow 4ypy = 2xpx \Leftrightarrow 2ypy = xpx$$

ومنه: $$X = \frac{2ypy}{px} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

بتعويض (4) في (3) نجد

$$R - \left(\frac{2Ypy}{px}\right) px - y.py = 0 \Leftrightarrow R - 2Y.py - Y.py = 0 \Leftrightarrow R - 3Y.py = 0$$

⇨ $Y = \frac{R}{3py}$ **دالة الطلب على السلعة** (Y)

.....(5)

بتعويض (5) في المعادلة (4) نجد: $X = \frac{2\left(\frac{R}{3py}\right)py}{px} = \frac{2R}{3px}$

ومنه:

دالة الطلب على السلعة (X): $X = \frac{2R}{3px}$

نلاحظ أن (py)سعر السلعة (Y) لا يؤثر على الطلب على السلعة (X)، و(px) سعر السلعة (X) لا يؤثر على الطلب على السلعة (Y).

الأستاذ عراوة عبد العزيز