Série 2

Intégrales Impropres ou Généralisées

(Exercices supplémentaires avec solutions)

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}dx$$

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg}(3x)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1} \qquad \int_0^{e/3} \ln(3x)\,dx$$

Solutions

1. La fonction $1/\sqrt{9-x^2}$ a une discontinuité en $x = 3$. On a, alors :

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{a\to 3^-}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{a\to 3^-}\int_0^a \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$w = \frac{x}{3} \Rightarrow dw = \frac{dx}{3} \Rightarrow pour : \begin{cases} x = a \Rightarrow w = a/3 \\ x = 0 \Rightarrow w = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^a \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \int_0^{a/3} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \qquad \ldots (1)$$

Effectuons un second changement de variable :

$$w = \sin r \Rightarrow dw = \cos r\,dr \Rightarrow pour : \begin{cases} w = a/3 \Rightarrow r = \arcsin(a/3) \\ w = 0 \Rightarrow r = \arcsin 0 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$(1) \Rightarrow \int_0^{a/3} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \int_0^{\arcsin(a/3)} \frac{\cos r\,dr}{\sqrt{1-\sin^2 r}} = \int_0^{\arcsin(a/3)} \frac{\cos r\,dr}{\sqrt{\cos^2 r}} = \int_0^{\arcsin(a/3)} dr$$
$$= [r]_0^{\arcsin(a/3)} = \arcsin(a/3)$$

Par conséquent

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{a\to 3^-}\int_0^a \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \lim_{a\to 3^-} \arcsin(a/3) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

2. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$v = \operatorname{arctg} x \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} v = x \;\Rightarrow\; (\operatorname{tg} v)' dv = (1+\operatorname{tg}^2 v) dv = dx \Rightarrow\; dv = \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 v} = \frac{dx}{1+x^2}$$

et

$$pour : \begin{cases} x = a \;\Rightarrow\; w = \operatorname{arctg} a \\ x = 0 \;\Rightarrow\; w = \operatorname{arctg} 0 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^a \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx = \int_0^a e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\operatorname{arctg} a} e^v dv = [e^v]_0^{\operatorname{arctg} a} = e^{\operatorname{arctg} a} - 1$$

Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx = \lim_{a \to +\infty} (e^{\operatorname{arctg} a} - 1) = e^{\pi/2} - 1$$

3. La fonction $\cos(2x)/\sqrt{\sin(2x)}$ à des discontinuités aux points $x = 0$ et $x = \pi/2$. L'intégrale doit être scinder en deux, soit :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx = \int_0^{c} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx + \int_c^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx$$

On choisit $c = \pi/4$ (pour simplifier les calculs plus bas). On a alors :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi/4} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx + \lim_{b \to \pi/2^-} \int_{\pi/4}^{b} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$u = sin(2x) \quad \Rightarrow \quad du = 2cos(2x)dx$$

D'où

$$\int \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{sin(2x)}$$

Par conséquent

$$\int_a^{\pi/4} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = \left[\sqrt{sin(2x)}\right]_a^{\pi/4} = \sqrt{sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{sin(2a)} = 1 - \sqrt{sin(2a)}$$

$$\int_{\pi/4}^{b} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = \left[\sqrt{sin(2x)}\right]_{\pi/4}^{b} = \sqrt{sin(2b)} - \sqrt{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{sin(2b)} - 1$$

et

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi/4} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = \lim_{a \to 0^+} \left[1 - \sqrt{sin(2a)}\right] = 1$$

$$\lim_{b \to \pi/2^-} \int_{\pi/4}^{b} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = \lim_{b \to \pi/2^-} \left[\sqrt{sin(2b)} - 1\right] = -1$$

Finalement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi/4} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx + \lim_{b \to \pi/2^-} \int_{\pi/4}^{b} \frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)}} dx = 1 - 1 = 0$$

4. La fonction $\mathrm{tg}(3x)$ a une discontinuité au point $x = \pi/6$. On écrit alors :

$$\int_0^{\pi/6} \mathrm{tg}(3x)\,dx = \lim_{a\to\pi/6^-}\int_0^a \mathrm{tg}(3x)\,dx = \lim_{a\to\pi/6^-}\int_0^a \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}dx$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$u = \cos(3x) \quad \Rightarrow \quad du = -3\sin(3x)dx \Rightarrow \quad pour : \begin{cases} x = a & \Rightarrow \quad w = \cos(3a) \\ x = 0 & \Rightarrow \quad w = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^a \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}dx = \int_1^{\cos(3a)} \frac{du}{-3u} = -\frac{1}{3}[\ln u]_1^{\cos(3a)} = -\frac{1}{3}\ln[\cos(3a)]$$

Par conséquent

$$\int_0^{\pi/6} \mathrm{tg}(3x)\,dx = \lim_{a\to\pi/6^-}\int_0^a \mathrm{tg}(3x)\,dx = \lim_{a\to\pi/6^-}\left(-\frac{1}{3}\ln[\cos(3a)]\right) = -\frac{1}{3}\lim_{a\to\pi/6^-}(\ln[\cos(3a)])$$
$$= -\frac{1}{3}\ln\left[\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right] = -\frac{1}{3}\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{3}\ln[0] = +\infty$$

5. La fonction suivante n'est pas définie pour $x = 1$, donc l'intégrale doit être scindée en deux. En choisissant $x = 2$ comme point intermédiaire, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1} = \lim_{\alpha\to 1^+}\int_\alpha^2 \frac{xdx}{x^2-1} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^\beta \frac{xdx}{x^2-1}$$

Or

$$\int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

D'où

$$\int_\alpha^2 \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}[\ln(x^2-1)]_\alpha^2 = \frac{1}{2}[\ln 3 - \ln(\alpha^2-1)] \;\Rightarrow\; \lim_{\alpha\to1^+}\int_\alpha^2 \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to1^+}[\ln 3 - \ln(\alpha^2-1)] = +\infty$$
$$\int_2^\beta \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}[\ln(x^2-1)]_2^\beta = \frac{1}{2}[\ln(\beta^2-1) - \ln 3] \;\Rightarrow\; \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^\beta \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}[\ln(\beta^2-1) - \ln 3] = +\infty$$

Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1} = +\infty$$

6. On a :

$$\int_0^{e/3} \ln(3x)\,dx = \lim_{c\to0^+}\int_c^{e/3} \ln(3x)\,dx$$

Effectuons une intégration par parties, on a :

$$\begin{cases} u = \ln(3x) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u' = 1/x \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_c^{e/3} \ln(3x)\,dx = [x\ln(3x)]_c^{e/3} - \int_c^{e/3} \frac{1}{x}x\,dx = \frac{e}{3}\ln(e) - c\ln(3c) - \left(\frac{e}{3} - c\right) = \frac{e}{3} - c\ln(3c) - \frac{e}{3} + c$$
$$= -c\ln(3c) + 3c$$

D'où

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^{e/3} \ln(3x)\,dx = \lim_{c\to 0^+}[-c\ln(3c)+3c] = \lim_{c\to 0^+}[-c\ln(3c)]+0$$

Or, en posant $C = 1/c$, telle que lorsque $c \to 0^+ \Rightarrow C \to +\infty$. D'où :

$$\lim_{c\to 0^+}[-c\ln(3c)] = -\lim_{C\to+\infty}\left[\frac{1}{C}\ln\left(\frac{3}{C}\right)\right] = -\lim_{C\to+\infty}\frac{1}{C}[\ln 3-\ln C] = -\lim_{C\to+\infty}\frac{\ln 3}{C}+\lim_{C\to+\infty}\frac{\ln C}{C} = 0+0$$

Finalement

$$\int_0^{e/3} \ln(3x)\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^{e/3} \ln(3x)\,dx = 0$$

Exercice 2

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx \qquad \int_e^{+\infty} x\ln x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos^2 x}{x^2}dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2-x^2} \qquad \int_0^{2} \frac{dx}{x-1}$$

Solutions

1. On a :

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} \sin x\,dx = -\lim_{a\to+\infty}[\cos x]_0^a = -\lim_{a\to+\infty}(\cos a-1) = 1-\lim_{a\to+\infty}\cos a$$

Or la fonction $\cos a$ peut prendre une infinité de valeurs quand $a \to +\infty$, donc la limite n'existe pas. Par conséquent, l'intégrale est divergente.

2. On a :

$$(x+1)(x+2)(x+3) > x^3 > 0 \qquad \forall x \geq 1$$
$$\Longrightarrow 0 < \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} < \frac{1}{x^3}$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ est convergente (intégrale de Riemann). D'après le théorème de la comparaison, on a :

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} < \dfrac{1}{x^3} \quad \forall x \geq 1 \\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3} \quad \text{converge} \end{cases} \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad \text{converge aussi}$$

3. On a :

$$x > \ln x \geq 1 \qquad \forall x \geq e$$
$$\Longrightarrow x\ln x \geq x \geq 1 \qquad \forall x \geq e$$

Or

$$\int_e^{+\infty} x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_e^{a} x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^a = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{e^2}{2}\right) = +\infty$$

Donc $\int_e^{+\infty} x\,dx$ est divergente. D'après le théorème de la comparaison, on a :

$$\begin{cases} x\ln x \geq x & \forall x \geq e \\ \int_e^{+\infty} x\,dx \ \text{ diverge} & \end{cases} \Rightarrow \int_e^{+\infty} x\ln x\,dx \quad \text{diverge aussi}$$

4. On a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \implies 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ est convergente (intégrale de Riemann). D'après le théorème de la comparaison, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\cos^2 x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} & \forall x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} & \text{converge} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos^2 x}{x^2} dx \quad \text{converge aussi}$$

5. La fonction à une discontinuité au points $x = \sqrt{2}$, l'intégrale est scindée en deux intégrales, soit :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2-x^2} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2-x^2} + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{2-x^2}$$

Calculons l'intégrale $\int \frac{dx}{2-x^2}$. On a :

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{a}{\sqrt{2}-x} + \frac{b}{\sqrt{2}+x} = \frac{a(\sqrt{2}+x) + b(\sqrt{2}-x)}{2-x^2} = \frac{(a-b)x + \sqrt{2}(a+b)}{2-x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ \sqrt{2}(a+b)=1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = b = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi

$$\int \frac{dx}{2-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2}-x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2}+x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[-\ln(\sqrt{2}-x) + \ln(\sqrt{2}+x)\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right)$$

D'où

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{c\to\sqrt{2}^-}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right)\right]_1^c = \frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{c\to\sqrt{2}^-}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}+c}{\sqrt{2}-c}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{0^+}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2-x^2}dx \quad \text{diverge} \qquad \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{2-x^2}dx \quad \text{diverge aussi}$$

6. La fonction $1/x - 1$ a une discontinuité au point $x = 1$. L'intégrale doit donc être scinder en deux, soit :

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

Or

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1^+}[\ln(x-1)]_a^2 = -\lim_{a\to 1^+}[\ln(a-1)] = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x-1} \quad \text{diverge}$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est divergente (sans savoir la nature de l'autre intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$).

Exercice 3

1. Calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_A \frac{x}{y} dxdy \qquad A = \{(x,y)\epsilon R^2 / \, 0 \leq x \leq 1 \, ; 0 \leq y \leq 4\}$$

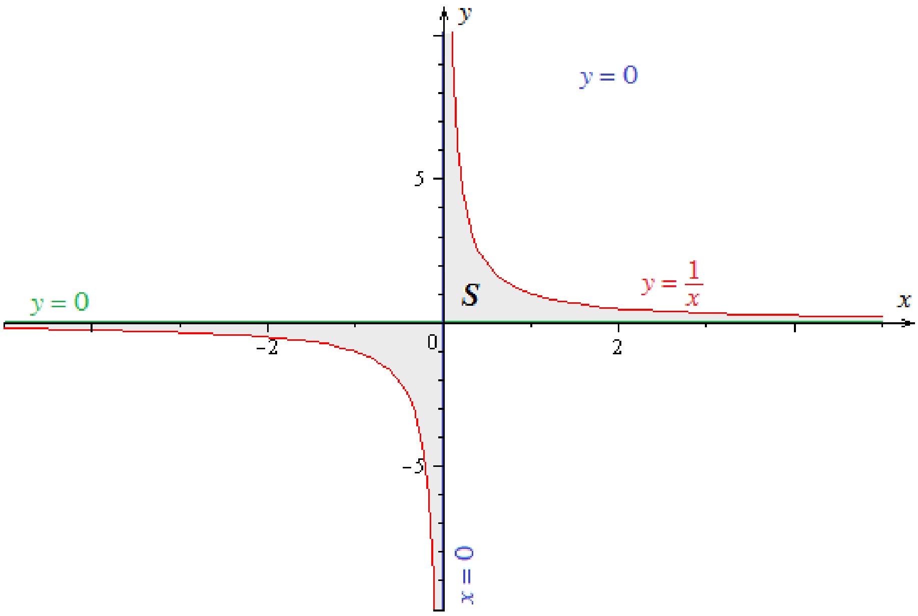
2. Calculer l'aire du domaine $\boldsymbol{S}$, délimitée par les courbes : $y = 1/x$, $y = 0$ et $x = 0$.

Solutions

1. On a :

$$\iint_A \frac{x}{y} dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^4 \left(\frac{x}{y}\right) dy \right] dx = \int_0^1 x\, dx \int_0^4 \frac{1}{y} dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \lim_{a \to 0^+} \int_a^4 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \lim_{a \to 0^+} [\ln y]_a^4 = \frac{1}{2} \lim_{a \to 0^+} [\ln 4 - \ln a] = +\infty$$

2. Selon le schéma ci-après, on a :



$$\iint_S dxdy = \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{1/x}^{0} dy \right] dx + \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{1/x} dy \right] dx = 2 \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{1/x} dy \right] dx = 2 \int_0^{+\infty} \left([y]_0^{1/x} \right) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Scindant l'intégrale finale en deux, en choisissant $x = 1$ comme point intermédiaire. Ainsi, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} + \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{a \to 0^+} [\ln x]_a^1 + \lim_{b \to +\infty} [\ln x]_1^b = - \lim_{a \to 0^+} \ln a + \lim_{b \to +\infty} \ln b$$
$$= +\infty + \infty = +\infty$$

D'où

$$\iint_S dxdy = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

FIN