

3.3 Fonctions Hyperboliques réciproques;

• Fonction Argument sinus hyperbolique;

Définition: la fonction sh étant continue, strictement croissante dans \mathbb{R} , elle admet donc une application réciproque appelée **Argument Sinus hyperbolique** et notée **Argsh** définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$$\text{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = \text{Argsh} x$$

$$y = \text{argsh} x \Leftrightarrow x = \text{sh} y$$

• la fonction argsh peut s'exprimer à l'aide de la fonction logarithme.

$$\text{ch}^2 y = 1 + \text{sh}^2 y \quad \text{et} \quad \text{ch} y > 0$$

$$\text{alors : } \text{ch} y = \sqrt{1 + \text{sh}^2 y} \\ = \sqrt{1 + x^2}$$

$$e^y = \text{ch} y + \text{sh} y = x + \sqrt{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

donc

$$\boxed{\text{Argsh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

Dérivabilité: La fonction Argsh est dérivable sur tout \mathbb{R} de dérivée:

$$\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Démonstration:

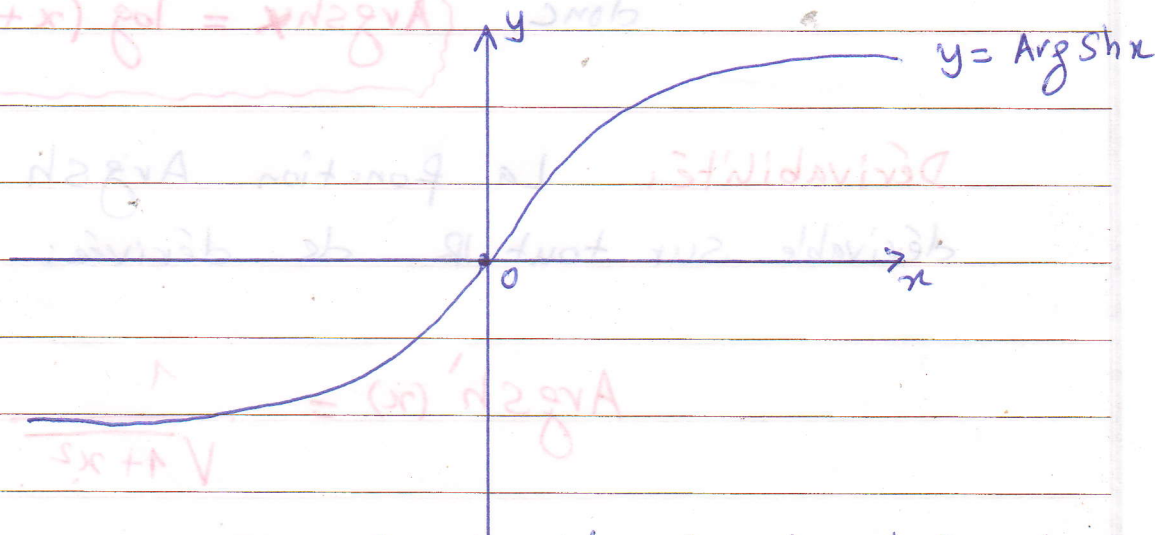
$$\begin{aligned}\operatorname{Argsh}'x &= \frac{1}{(\operatorname{Sh}x)'} = \frac{1}{\operatorname{ch}x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sh}^2x + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

donc la fonction Argsh est strictement croissante sur \mathbb{R} .

tableau de variation:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\operatorname{Argsh}x)'$	$+$	1	$+$
$\operatorname{Argsh}x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Courbe représentative.



remerque : la fonction Argsh est impaire.

la restriction de

• Fonction Argument Cosinus hyperbolique.

Def: la fonction ch est continue, strictement croissante et a valeur dans $[1, +\infty[$.

elle admet donc une application réciproque de $[1, +\infty[$ dans \mathbb{R}_+ appelée **Argument Cosinus hyperbolique** et notée **Argch**

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow y = \text{Argch } x$$

$$y = \text{Argch } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{ch } y \\ x \geq 1 \quad \quad \quad y \geq 0$$

- La fonction Argch est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- $\text{Argch } x$ s'exprime à l'aide de la fonction logarithme en effet:

$$+ \begin{cases} \text{ch } y = x \\ \text{sh } y = \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \quad (\text{puisque } y \geq 0)$$

$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

d'où

$$\boxed{\text{Argch } x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})} \quad , x \geq 1$$

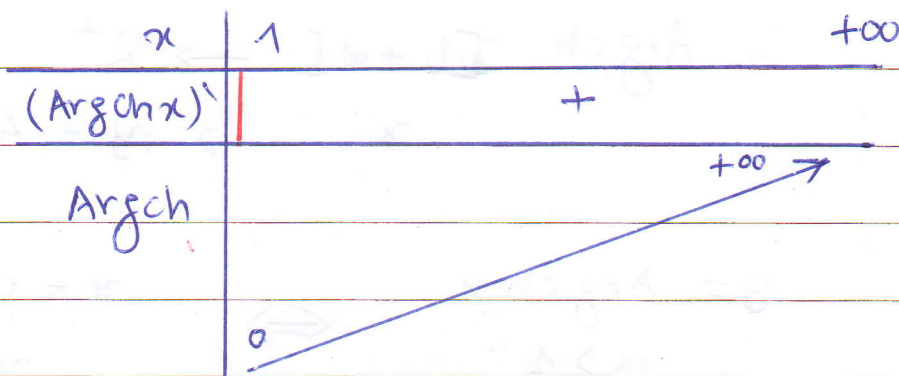
Dérivabilité La fonction Argch est dérivable sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$, de dérivée

$$\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

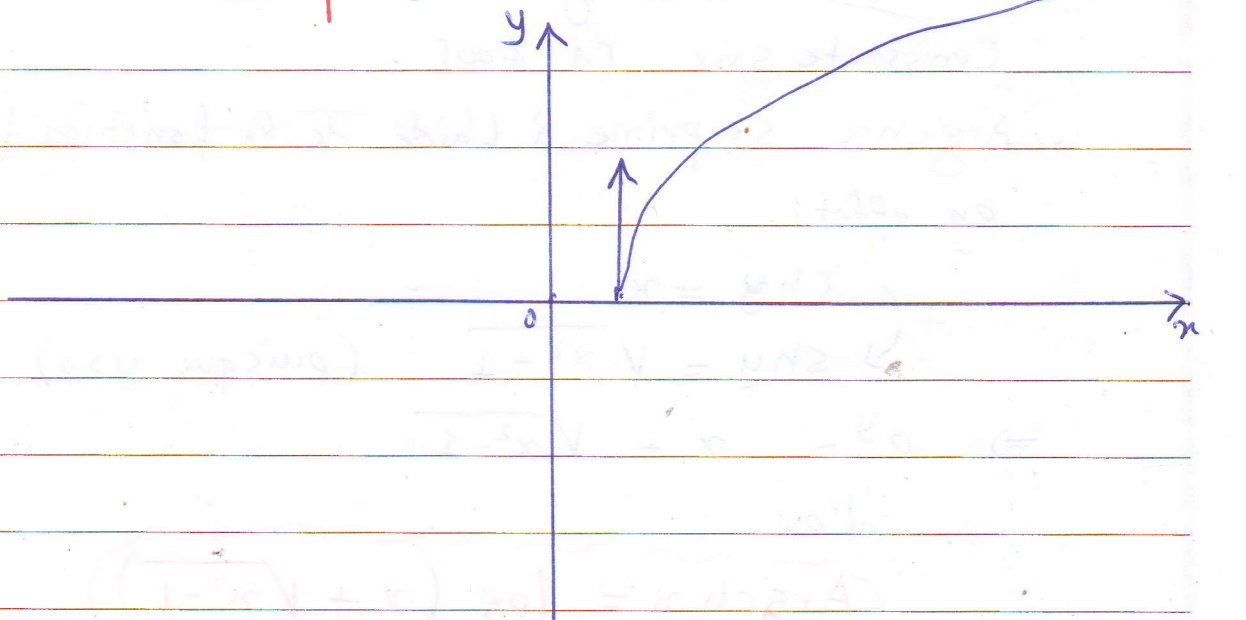
$$\text{Argch}'x = \frac{1}{(\text{ch}x)'} = \frac{1}{\text{sh}x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

tableau de variation :



Courbe représentative



Fonction Argument tangente hyperbolique.

Def: la fonction th est continue et strictement croissante de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$. elle admet donc une application réciproque, continue et strictement croissante de $] -1, 1[$ sur \mathbb{R} .

appelée **Argument tangente hyperbolique** et notée **Argth**.

$$\left. \begin{array}{l} y = \text{Argth} x \\ |x| < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \text{th} y$$

Cette fonction est impaire.

Argth s'exprime à l'aide de la fonction logarithme

$$y = \text{Argth} x \quad \text{on a} \quad x = \text{th} y = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\Rightarrow x \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} + 1} + x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$1 + x = e^{2y} (1 - x)$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$2y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

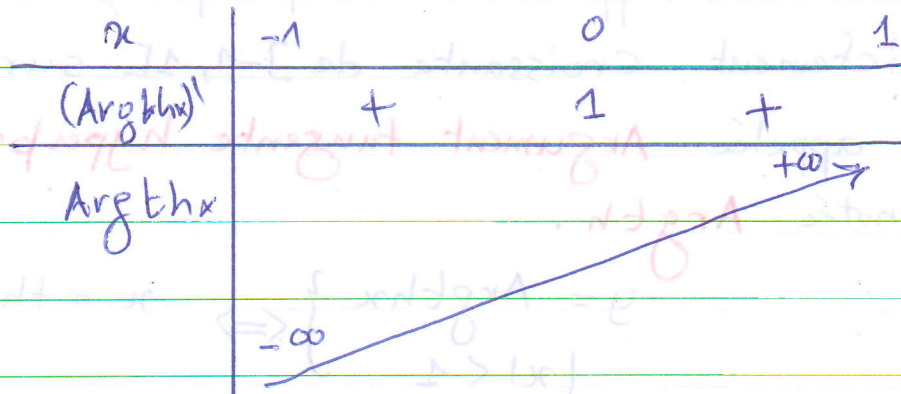
$$\text{Argth} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$$

Derivabilité: Argth est dérivable de dérivée

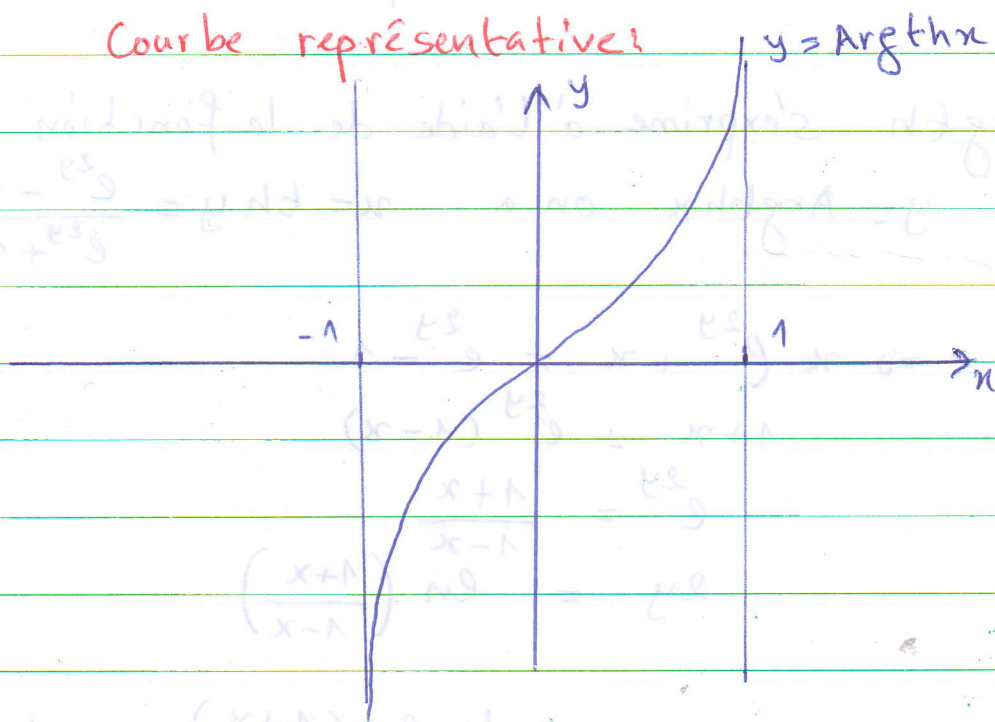
$$(\text{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\operatorname{Arctanh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th}' y)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

tableau de variation :



Courbe représentative :



$$\operatorname{Arctanh} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$(\operatorname{Arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$