Série 3

Suites et Séries

(Exercices supplémentaires avec solutions)

Exercice 1

Déterminer la nature des suites numériques suivantes :

$$\frac{2n^8-7}{(n^2+4n)^5} \qquad \frac{\cos(2n)}{\sin^2 n} \qquad \sqrt{n+3}-\sqrt{n}$$

Solutions

1. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^8-7}{(n^2+4n)^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^8}{(n^2)^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^8}{n^{10}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}=0$$

La suite est donc convergente.

2. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(2n)}{\sin^2 n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos^2 n-\sin^2 n}{\sin^2 n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2\sin^2 n}{\sin^2 n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sin^2 n}-2$$

Or la fonction $\sin^2 n$ n'est pas définie lorsque $n\to+\infty$. Donc la limite n'est pas définie et la suite est divergente.

3. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}/\sqrt{n}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{(n+3)/n}+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2\sqrt{n}}=0$$

La suite est donc convergente.

Exercice 2

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum(-1)^n\frac{n+3}{4n+1} \qquad \sum\frac{n}{e^n} \qquad \sum\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

$$\sum \frac{5^{n-3}}{2^n} \qquad \sum \frac{6}{(2n+1)(3n+4)} \qquad \sum \left[\frac{1}{\ln(2n)}\right]^n \qquad \sum \frac{1}{\ln(n+2)}$$

Solutions

1. Utilisant le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(a+\frac{1}{n}\right) = a$$

or

- si $a < 1$: notre série est convergente,
- si $a > 1$: notre série est divergente,
- si $a = 1$ alors :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Posons

$$v = \frac{1}{n} \quad \text{et quand} \quad n \to +\infty \ \Rightarrow \ v \to 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{v\to 0} e^{ln(1+v)/v}$$

D'autre part, en effectuant le changement de variable :

$$y = v+1 \quad \text{et quand} \quad v \to 0 \ \Rightarrow \ y \to 1$$

on obtient :

$$\lim_{v\to 0} \frac{\ln(1+v)}{v} = \lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{\ln y - \ln 1}{y-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{v\to 0} e^{ln(1+v)/v} = e^0 = 1$$

Cette dernière limite représente la définition de la dérivée de la fonction $\ln y$ pour $y = 1$. On a ainsi :

$$\lim_{y\to 1} \frac{\ln y - \ln 1}{y-1} = (\ln y)'|_{y=1} = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Ainsi, la limite du terme général ne tend pas vers 0, et par conséquent notre série est divergente lorsque $a = 1$.

2. Calculons la limite du terme général (u_n). On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n+3}{4n+1} = \pm \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{4n+1} = \pm\frac{1}{4} \neq 0$$

donc notre série est divergente.

3. Utilisons le critère de d'Alembert. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} < 1$$

Par conséquent, notre série est convergente.

4. Utilisons le critère des série alternées. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = \pm \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1} \\ u_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u_{n+1}| = \dfrac{1}{3^{n+1}} \\ |u_n| = \dfrac{1}{3^n} \end{cases}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\frac{1}{3} \leq 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n} \leq 1\cdot\frac{1}{3^n} \ \Rightarrow \ \frac{1}{3^{n+1}} \leq \frac{1}{3^n} \ \Rightarrow |u_{n+1}| \leq |u_n|$$

Donc la série est décroissante. Par conséquent, et selon le théorème des séries alternées, la série est convergente.

5. Utilisons le critère de d'Alembert. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5^{n+1-3}}{2^{n+1}}}{\frac{5^{n-3}}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5\cdot 5^{n-3}}{2\cdot 2^n}\cdot\frac{2^n}{5^{n-3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{2}=\frac{5}{2}>1$$

Donc la série est divergente.

6. Utilisons le critère de la comparaison. On a :

$$\begin{cases}2n+1>2n\\3n+4>3n\end{cases}\Rightarrow\ (2n+1)(3n+4)>6n^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{(2n+1)(3n+4)}<\frac{1}{6n^2}$$
$$\Rightarrow\ \frac{6}{(2n+1)(3n+4)}<\frac{1}{n^2}$$

Or, la série $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente. Donc, et selon le théorème de la comparaison, notre série est convergente.

7. Utilisant le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln(2n)}\right]^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(2n)}=0<1$$

Donc la série est convergente.

8. Utilisons le critère de la comparaison. On sait que :

$$\ln n<n\ \Rightarrow \ln(n+2)<n+2\ \Rightarrow\ \frac{1}{\ln(n+2)}>\frac{1}{n+2}$$

La fonction $\frac{1}{n+2}$ est équivalente à $\frac{1}{n}$, donc la série $\sum\frac{1}{n+2}$ est divergente. Selon le théorème de la comparaison, notre série est divergente aussi.

Exercice 3

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

$$f_n(x)=x^n\qquad x\in\mathbb{R}\qquad\qquad h_n(x)=x\left(1-\frac{1}{n}\right)\qquad(x\geq 0)$$

$$g_n(x)=x^n\qquad(0\leq x<1)\qquad\qquad v_n(x)=n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\qquad x\in[-1,1]$$

$$w_n(x)=n^2xe^{-nx}\qquad(x\geq 0)\qquad\qquad z_n(x)=x-\frac{\sin x}{n}\qquad x\in\mathbb{R}$$

Solutions

1. On a :

- Si $|x|<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.
- Si $x=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(1)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1)^n=1$.
- Si $x=-1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n=\pm 1$.
- Si $|x|>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\pm\infty$.

Donc la suite $f_n(x)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$, et par la suite n'est pas uniformément convergente aussi.

2. Convergence simple :

- Si $x=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(0)=0\quad(=x)$.
- Si $x>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}x\left(1-\frac{1}{n}\right)=x\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=x$

Donc la suite $h_n(x)$ est simplement convergente vers $h(x)=x$.

Convergence uniforme :

Calculons $\text{Sup}|h_n(x) - h(x)|$ pour tout $x \geq 0$. On a :

$$\text{Sup}|h_n(x) - h(x)| = \text{Sup}\left|x\left(1 - \frac{1}{n}\right) - x\right| = \text{Sup}\left|x - \frac{x}{n} - x\right| = \text{Sup}\left|-\frac{x}{n}\right| = \text{Sup}\left|\frac{x}{n}\right|$$

Or pour $x \geq 0$, on a : $\text{Sup}\left|\frac{x}{n}\right| = \text{Sup}\left(\frac{x}{n}\right) = +\infty$ quand $x \to +\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \text{Sup}\left(\frac{x}{n}\right) \neq 0$$

Donc la suite $h_n(x)$ n'est pas uniformément convergente vers $h(x) = x$.

3. Convergence simple :

- Si $x = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0) = 0$.
- Si $0 < x < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

Donc la suite $g_n(x)$ est simplement convergente vers $g(x) = 0$ quand $0 \leq x < 1$.

Convergence uniforme :

$$\text{Sup}|g_n(x) - g(x)| = \text{Sup}|x^n - 0| = \text{Sup}|x^n| = \text{Sup}(x^n)$$

Or la fonction x^n est croissante et positive sur l'intervalle $[0,1[$ et par conséquent :

$$\text{Sup}(x^n) = 1^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \text{Sup}(x^n) = 1 \neq 0$$

Donc la suite $g_n(x)$ n'est pas uniformément convergente vers $g(x) = 0$ lorsque $0 \leq x < 1$.

4. Convergence simple :

- si $x = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(0) = 0 \quad (= x)$,
- si $x \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$

  Posons $y = \frac{x}{n} \Rightarrow n = \frac{x}{y}$ et quand $n \to +\infty$ alors $y \to 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{y\to0} x\frac{\sin y}{y} = x\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = x \cdot 1 = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n(x) = x$$

Donc la suite $v_n(x)$ est simplement convergente vers $v(x) = x$.

Convergence uniforme :

$$\text{Sup}|v_n(x) - v(x)| = \text{Sup}\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right|$$

Etudions la fonction : $\varphi(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$. Calculons la dérivée (par rapport à x) :

$$\varphi'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \text{ et puisque } -1 \leq \cos\left(\frac{x}{n}\right) \leq 1 \text{ alors } \varphi'(x) \leq 0$$

Donc la fonction $\varphi(x)$ est décroissante à l'intérieur de l'intervalle $[-1,1]$, mais de signe qui peut changer. Par conséquent :

$$\text{Sup}\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right| = \text{Sup}(|\varphi(1)|, |\varphi(-1)|) = \text{Sup}\left(\left|n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|, \left|n\sin\left(\frac{-1}{n}\right) + 1\right|\right)$$
$$= \text{Sup}\left(\left|n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|, \left|-n\sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right|\right) = \left|n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \text{Sup}\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|$$

Or, on sait que (voir plus haut) :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right) = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| = |1 - 1| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \text{Sup}\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right| = 0$$

Donc la suite $v_n(x)$ est uniformément convergente vers $v(x) = 0$ lorsque $x \in [-1,1]$.

5. Convergence simple :

- si $x = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(0) = 0$,
- si $x > 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2xe^{-nx} = x \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{nx}} = 0$,

Donc la suite $w_n(x)$ est simplement convergente vers $w(x) = 0$.

Convergence uniforme :

$$\mathrm{Sup}|w_n(x) - w(x)| = \mathrm{Sup}|n^2xe^{-nx} - 0| = \mathrm{Sup}|n^2xe^{-nx}|$$

et pour $x \geq 0$:

$$\mathrm{Sup}|n^2xe^{-nx}| = \mathrm{Sup}(n^2xe^{-nx})$$

Etudions la fonction : $\gamma(x) = n^2xe^{-nx}$. La dérivée est :

$$\gamma'(x) = n^2(e^{-nx} - xne^{-nx}) = n^2e^{-nx}(1 - nx)$$

Or, si $\gamma'(x) = 0 \;\Rightarrow x = 1/n$, et $\gamma'(x) > 0$ lorsque $x < 1/n$ et vice versa.

Traçons le tableau des variations pour $x \geq 0$:

x	0		$1/n$		$+\infty$
$\gamma'(x)$		$+$	0	$-$	
$\gamma(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{n}{e}$	$\searrow$	0

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n^{2\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}} = ne^{-1} = \frac{n}{e}$$

$$\gamma(0) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \gamma(x) = 0$$

Puisque la fonction $\gamma(x)$ est strictement positif quand $x > 0$, on a alors :

$$\mathrm{Sup}(n^2xe^{-nx}) = \frac{n}{e}$$

Par la suite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Sup}|n^2xe^{-nx}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e} = +\infty$$

Donc la suite $w_n(x)$ n'est pas uniformément convergente vers $w(x) = 0$ lorsque $x \geq 0$.

6. Convergence simple :

- si $x = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(0 - \frac{\sin 0}{n}\right) = 0 \quad (= x)$,
- si $x \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(x - \frac{\sin x}{n}\right) = x$,

Donc la suite $z_n(x)$ est simplement convergente vers $z(x) = x$.

Convergence uniforme :

$$\mathrm{Sup}|z_n(x) - z(x)| = \mathrm{Sup}\left|\left(x - \frac{\sin x}{n}\right) - x\right| = \mathrm{Sup}\left|-\frac{\sin x}{n}\right| = \mathrm{Sup}\left|\frac{\sin x}{n}\right|$$

Puisque $\sin x$ est une fonction impaire, il est clair que ces valeurs supérieures sont égales avec des signes contraires. Ainsi, on peut écrire :

$$\mathrm{Sup}\left|\frac{\sin x}{n}\right| = \begin{cases} \mathrm{Sup}\left(\frac{\sin x}{n}\right) & \text{pour } x \geq 0 \\ \text{ou} & \\ \mathrm{Sup}\left(-\frac{\sin x}{n}\right) & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

En considérant la première équation, on a :

$$\mathrm{Sup}\left(\frac{\sin x}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Sup}\left|\frac{\sin x}{n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc la suite $z_n(x)$ est uniformément convergente vers $z(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Etudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$\sum ne^{-nx} \quad x \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad \sum \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \sum \frac{\cos^2(nx)}{n^4} \quad x \in \mathbb{R}$$

Solutions

1. Utilisons le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-nx}e^{-x}}{ne^{-nx}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{n} e^{-x} = e^{-x}$$

Or

- si $x > 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-x} < 1$, notre série est convergente.
- si $x = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-0} = 1$, on ne peut rien dire. Cependant, on a dans ce cas :

$$\sum ne^{-n0} = \sum n$$

Or cette série est divergente. Donc pour $x = 0$ notre série est divergente.

2. Utilisons le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

Donc notre série est convergente $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

3. Utilisons le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Or

- si $x \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, notre série est convergente.
- si $x = 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, on ne peut rien dire. Cependant, on a dans ce cas :

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum \frac{1}{(1)^n} = \sum 1$$

Or cette série est divergente. Donc pour $x = 0$ notre série est divergente.

4. On sait que :

$$-1 \leq \cos(nx) \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \cos^2(nx) \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{\cos^2(nx)}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente. Selon le critère de comparaison, notre série est convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.