Université ZIANE Achour de Djelfa
Faculté Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
1ere année Master : Matière Condensée

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°2 : ESPACES VECTORIELS

Exercice n°1 :

Montrer que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les lois :

$$\oplus : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\left(\left(x_1,........,x_n\right),\left(y_1,.........,y_n\right)\right) \mapsto \left(x_1,........,x_n\right) \oplus \left(y_1,.........,y_n\right) = \left(x_1+y_1,..........,x_n+y_n\right)$$

$$\otimes : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\left(\alpha,\left(x_1,.........,x_n\right)\right) \mapsto \alpha \otimes \left(x_1,.........,x_n\right) = \left(\alpha x_1,...........,\alpha x_n\right)$$

Exercice n°2 :

Montrer que l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel $\mathbb{R}$ avec les lois :

$$+ : \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}\times\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}\to\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$
$$\left(g(x),h(x)\right) \mapsto (g+h)(x) = g(x)+h(x)$$

$$* : \mathbb{R}\times\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}\to\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$
$$\left(\alpha,h(x)\right) \mapsto (\alpha * h)(x) = \alpha h(x)$$

Exercice n°3 :

On considère $\mathbb{R}^4$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soient :

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+y+z+t=0\right\},\ F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x=y=z=t\right\}$$

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°4 :

On considère $\mathbb{R}^3$, comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soient les vecteurs :

$\vec{v}_1=(1,2,-1),\ \vec{v}_2=(2,2,1),\ \vec{v}_3=(-1,1,-1)$

1. Montrer que la famille de vecteurs $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ est libre.

Exercice n°5 :

Dans $\mathbb{R}^4$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y + z + t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Trouver une base de F.

Exercice n°6 :

Dans $\mathbb{R}^3$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soient les vecteurs :

$\vec{v}_1 = (3,-2,4)$, $\vec{v}_2\,(-3,1,1)$, $\vec{v}_3 = (1,0,0)$, $\vec{u}_1 = (2,1,0)$, $\vec{u}_2\,(2,0,1)$, $\vec{u}_3 = (-1,0,0)$

1. Ce système des vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ forme-t-il une base ?
2. Montrer que la famille de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{w} = (-1,2,3)$ dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Exercice n°7 :

On considère $\mathbb{R}^3$, comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs : $\vec{u}_1 = (1,-1,2)$, $\vec{u}_2\,(1,1,2)$ et $\vec{u}_3 = (3,-1,6)$, et V le sous-espace de $\mathbb{R}^3$, engendré par les vecteurs : $\vec{v}_1 = (0,-2,0), \vec{v}_2 = (1,0,1)$

1. Trouver les dimensions des sous-espaces vectoriels U, V et $U \oplus V$.

Exercice n°8 :

On considère les deux sous-espaces E et F de l'exercice n°3.

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.