Université ZIANE Achour de Djelfa
Faculté Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
1^{ere} année Master : Matière Condensée

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°3 : MATRICES

Exercice n°1:

On donne :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA si cela possible.
2. Ecrire ${}^tA$ et ${}^tB$.
3. Calculer ${}^t(AB)$. Comment peut-on vérifier le calcul ?

Exercice n°2:

On considère les deux matrices (3,3) à coefficients réels suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A+B$, $B+A$.
2. Calculer ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^t(A+B)$, ${}^tA+{}^tB$.
3. Calculer $A+3B$.
4. Calculer les produits AB et BA. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
5. Décomposer la matrice A en somme deux matrices l'une symétrique et l'autre antisymétrique.

Exercice n°3:

On considère les deux matrices (3,3) à coefficients réels suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de la matrice.
2. Montrer que A est inversible.
3. Calculer A^{-1} avec trois méthodes différentes.

Exercice n°4:

On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice B telle que : $A = 2I + B$.
2. Calculer B^2 et B^3.
3. En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier n .

Exercice n°5:

Soient les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^{-1}.
2. Calculer $A' = P^{-1}AP$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} /\ A^n = PA^m P^{-1}$.
4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et les relations de récurrences :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

   a) Calculer u_n et v_n pour tout n , en utilisant la matrice A .

Exercice n°6:

Soit M_2 l'ensemble des matrices (2,2) à coefficients réels et de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M_2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices (2,2) à coefficients réels
2. Donner une base de M_2.

Exercice n°7:

On considère la matrice (3,3) à coefficients réels suivante :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A^2.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice n°8:

On considère la matrice (3,3) à coefficients réels suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \geq 2$, calculer A^n.

Exercice n°9:

On considère les deux matrices (3,3) à coefficients réels suivantes :

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ;\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer T^3.
2. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, A^n. Calculer A^5.