Université ZIANE Achour de Djelfa
Faculté Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
1ère année Master : Matière Condensée

Matière : Mathématiques pour la physique –II-

SERIE N°7: REDUCTION DES ENDOMORPHISMES (MATRICES CARREES)

Exercice n°1:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par:

$$f\left[(x, y, z)\right] = (x + 2y + 2z, 2x + y + z, 2x - 2y + z)$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Montrer qu'il existe une base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f, par rapport à cette base, soit une matrice diagonale.

Exercice n°2:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique est:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.
2. M est-elle diagonalisable?

Exercice n°3:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, par rapport à la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice n°4:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, par rapport à la base canonique est:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable?
3. Montrer qu'il existe une base $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que:
   - $\vec{w}_3 \in \ker(A-1)^2$ et $\vec{w}_3 \notin \ker(A-1)$.
   - La matrice de f par rapport à cette base $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ soit

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°5:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, par rapport à la base canonique est:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $n \geq 2$, calculer A^n .

Exercice n°6:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ .soient f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6 des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, dont les matrices par rapport à la base canonique' de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix};$$

$$A_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A_5=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix};\ A_6=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de chacun de ces endomorphismes.
2. En déduire, parmi ces matrices, celles qui sont diagonalisables.

Exercice n°7:

On considère $\mathbb{R}^4$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ .soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$, dont les matrices par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sont respectivement:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°8:

On considère $\mathbb{R}^3$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, par rapport à la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable?
3. Montrer qu'il existe une base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f , par rapport à cette base soit:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$