Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
Niveau : M1 – Physique de la matière condensée **Date : 17/01/2019, Durée 1H30**

Matière : Méthodes mathématiques pour la physique -I-

– Corrigé type –

— Examen
— TD (test)

Exercice N°1 [06 points], TD/8 :

1) Montre que : $\forall \theta \in \mathbb{R}: \ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, avec $i^2 = -1$. 1 2
2) Trouver le module et l'argument des nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$. 1 2
3) Calculer : $\mathrm{Log}(1+i)$ et $\mathrm{Log}(1-i)$. 1 1
4) Ecrire les nombres complexes z_1 et z_1 sous forme exponentielle. 1 1
5) En déduire la forme exponentielle de $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$. 1 1
6) Résoudre l'équation : $z^3 = k(1-i), \ k \in \mathbb{R}$. 1 1

Exercice N°2 [06 points], TD/ 7:

1) Montrer que la fonction ($u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) définie ci-dessous est harmonique.
$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \ x, y \in \mathbb{R}.$$ 2 2
2) Trouver une fonction ($v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe. 2 2
3) Calculer l'intégrale : $\int f(z)dz$. 2 1
4) Déduire que l'intégrale : $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$, Γ est lacet de $\mathbb{C}$. 1 1

Exercice N°3 [08 points] :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\oint_\Gamma z^2 dz$, Γ est cercle de centre (0,0) et du rayon 1. 2
2) $\oint_\Gamma \frac{Z^2 + Z + 1}{Z - 1 - i} dz$, Γ est cercle de centre (1,0) et du rayon 2. 2
3) $\oint_\Gamma \frac{Z^2 + Z + 1}{Z - 1 - i} dz$, Γ est cercle de centre (1,0) et du rayon $\frac{1}{2}$. 1
4) $\oint_\Gamma \frac{Z + \cos(z)}{Z - (\pi/2)} dz$, Γ est cercle de centre (0,1) et du rayon 1. 1
5) $\oint_\Gamma \frac{Z^4 + Z^3 + 1}{(Z+i)^3} dz$, Γ est un lacet quelconque du centre (0,-1). 2

Bon courage

Corrigé type - Méthodes Maths 1 - M1-Phys-Méteo
AU : 2018/2019.

EXO N°1 :

1) Montrons que $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, avec $i^2 = -1$

posons $y(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

donc $y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$

$= i\left(\frac{-1}{i}\sin\theta + \cos\theta\right) = i(\cos\theta + i\sin\theta)$

$y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = i\,y(\theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = i\,y$ 0,25 0,5

donc : $\frac{dy}{y} = i\,d\theta \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = i\int d\theta$

$Ln|y| = i\theta + cst \Rightarrow y = e^{(i\theta + cst)}$

$\Rightarrow y = A\,e^{i\theta}$ 0,25 0,5 A = cste

$y(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1 = A\,e^{i(0)} = A\cdot 1 = A$

$\Rightarrow A = 1$.

finalement $\boxed{y(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$ 0,5 1

2) Module et argument des nombres complexes z_1 et z_2

$z_1 = 1 - i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}\,e^{i(-\pi/4)}} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{2} & 0{,}25\ \ 0{,}5 \\ Arg(z_1) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. & 0{,}25\ \ 0{,}5 \end{cases}$

1

$z_2 = 1+i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$\boxed{z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\pi/4\right)}} \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{2} & 0{,}25 \quad 0{,}5 \\ Arg(z_2) = \pi/4 + 2k\pi, \; k\in\mathbb{Z}. & 0{,}25 \quad 0{,}5 \end{cases}$

③ Calcul de $Log(1+i)$ et $Log(1-i)$:

a) $Log(i+i) = Log(z_2) = Ln|z_2| + iArg(z_2)$

$\boxed{Log(i+1) = Ln|\sqrt{2}| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right);\; k\in\mathbb{Z}}$ 0,5 0,5

b) $Log(1-i) = Log(z_1) = Ln|z_1| + i\,Arg(z_1)$

$\boxed{Log(1-i) = Ln|\sqrt{2}| + i\left(-\pi/4 + 2k\pi\right);\; k\in\mathbb{Z}}$ 0,5 0,5

4) a) $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i(-\pi/4)}$ 0,5 0,5

b) $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4)}$ 0,5 0,5

5) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4)}}{\sqrt{2}\, e^{i(-\pi/4)}}\right)^{10} = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{10} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{10}$ 0,5 0,5

$\boxed{z = e^{i(5\pi)} = \cos(5\pi) + i\sin(5\pi)}$ 0,5 0,5

6) Résolution de l'équation $z^3 = k(1-i)$; $k\in\mathbb{R}$.

a) Si $k=0 \Rightarrow z^3 = 0 \Rightarrow \boxed{z=0}$. 0,5 0,5

b) si $k \neq 0$, $k > 0$ $\Rightarrow z^3 = k(1-i) = k\sqrt{2}\, e^{i(-\pi/4)}$

$$\Rightarrow z = (|k|\sqrt{2})^{1/3} \cdot \left(e^{i(-\pi/4)}\right)^{1/3} = (k\sqrt{2})^{1/3} e^{i(-\frac{\pi}{12})} \quad ; |k| = k$$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} |z| = (k\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z) = -\pi/12 + 2k'\pi ; \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Solutions:

$$\begin{cases} z_1 = \begin{cases} |z_1| = (|k|\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z_1) = -\pi/12 \end{cases} ; \ (k'=0) \\ z_2 = \begin{cases} |z_2| = (k\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z_2) = -\pi/12 + 2\pi = \frac{23\pi}{12} \end{cases} ; \ (k'=1) \\ z_3 = \begin{cases} |z_3| = (k\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z_3) = -\frac{\pi}{12} + 4\pi = \frac{47}{12}\pi \end{cases} ; \ (k'=2) \end{cases}$$

0,25

0,25

c) si $k \neq 0$, $k < 0$ $\Rightarrow z^3 = (-k)\sqrt{2}\left(-e^{i(-\pi/4)}\right)$; $|k| = -k$

$$-1 = -1 + 0 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i(\pi)}$$

$$z^3 = (-k)\sqrt{2}\, e^{i(\pi - \pi/4)} = (-k)\sqrt{2}\, e^{i(\frac{3\pi}{4})}$$

$$z^3 = |k|\sqrt{2}\, e^{i(\frac{3\pi}{12})} \quad ; \ |k| = -k.$$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} |z| = (|k|\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z) = \frac{3\pi}{12} + 2k'\pi, \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Solutions:

$$\begin{cases} z_1 = \begin{cases} |z_1| = (|k|\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z_1) = 3\pi/4, \ (k'=0) \end{cases} \\ z_2 = \begin{cases} |z_2| = (k\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z_2) = \frac{3\pi}{12} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}, \ (k'=1) \end{cases} \\ z_3 = \begin{cases} |z_3| = (k\sqrt{2})^{1/3} \\ Arg(z_3) = \frac{3\pi}{12} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}, \ (k'=2) \end{cases} \end{cases}$$

0,25

0,25

3

EXO2 :

1) $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2x \,,\ (x,y \in \mathbb{R}).$

Montrons que $u(x,y)$ est harmonique :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \ ?$$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2$ 0,5 0,5

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y - 2x + 3 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -2$ 0,5 0,5

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0.$$

$\Delta u = 0 \Rightarrow u(x,y)$ est harmonique. 1 1

2) Trouvons une fonction $v(x,y)$ telle que $f = u + iv$ soit holomorphe.

condition de Cauchy-Riemann : (f holomorphe)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2y - 2 \quad \ldots (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - 2x + 3 \quad \ldots (2) \end{cases}$$
0,5 0,5 0,5 0,5

$$\partial v = (2x - 2y - 2)\,\partial y \Rightarrow v(x,y) = \int (2x - 2y - 2)\, dy$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + f(x) \quad \ldots (3)$$
0,5 0,5

en remplaçant (3) dans (2) $\cancel{-\frac{\partial v}{\partial x} = -2y + 2y + 2 - f'(x)}$

$\cancel{= -2y - 2x + 3}$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(2y + f'(x)\right) = -2y - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = -(-2x + 3)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 3$$

$f(x) = \int (2x-3)\,dx = x^2 - 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

$v(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + c$

$$\boxed{v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 2y - 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$ 0,5 0,5

③ Calcul de l'intégral $\int f(z)\,dz$.

$f(z) = u + iv$, $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + i\,dy$.

$$\boxed{f(z) = u + iv, \; dz = dx + i\,dy}$$

$f(z)\cdot dz = (u+iv)(dx + i\,dy)$

$= u\,dx + iu\,dy + iv\,dx - v\,dy.$

$$\boxed{f(z)\,\cancel{dz} = (u\,dx - v\,dy) + i\,(u\,dy + v\,dx)}$$

$$\int f(z)\,dz = \int u\,dx - \int v\,dy + i\left(\int u\,dy + \int v\,dx\right)$$ 0,5 1

$$\int f(z) = \left(\frac{x^3}{3} - y^2x - x^2y - x^2 + 3x\right) - \left(x^2y - \frac{y^3}{3} + xy^2 - y^2 - 3xy + Cy\right) +$$
$$i\left(x^2y - \frac{y^3}{3} - xy^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{x^3}{2} + y^2x + x^2y - 2yx - \frac{3}{2}x^2 + Cx\right)$$
$$+ C_1 + iC_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ 0,5 1

④ comme $f(z)$ est une fonction holomorphe $\Rightarrow$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0,$$ Γ est lacet de $\mathbb{C}$.

1 1

Exo N° 3 Calcul d'intégrale :

1) (4) $\oint_\Gamma z^2 dz = ?$ Soit $f(z) = z^2$

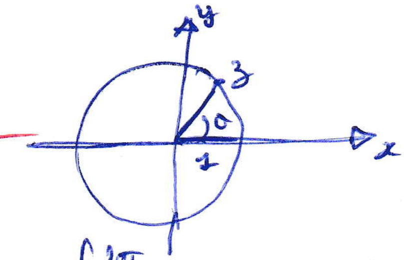
on a $f'(z) = 2z$ $\exists$ sur $\mathbb{C}$ et $f'(z)$ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$ (f est entière) $\Rightarrow$ f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

donc $\oint_\Gamma z^2 dz = 0$ (théorème de Cauchy), $\forall \Gamma$ lacet de $\mathbb{C}$

2

b) par calcul : Γ est lacet $\Rightarrow$ cercle du centre O et rayon 1

$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
$\theta \in [0, 2\pi[$. 0,5

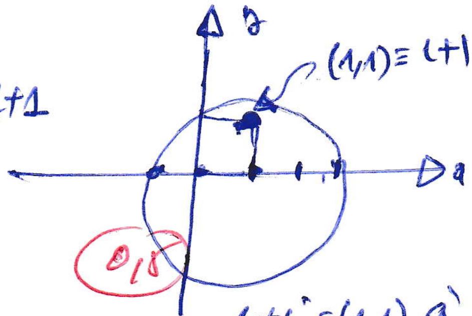


$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^2 d(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{i(2\theta)} \cdot e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{i(3\theta)} d\theta = \left.\frac{1}{i(3\theta)} \cdot e^{i(3\theta)}\right]_0^{2\pi}$$ 0,5

$$= \frac{1}{i(3\theta)} \left[e^{i(6\pi)} - e^{i(0)} \right] = \frac{1}{i(3\theta)} (1-1) = 0.$$ 0,5 0,5

2) $\oint_\Gamma \frac{z^2+z+1}{z-1-i} dz$; posons $f(z) = z^2+z+1$
et $a = 1+i$



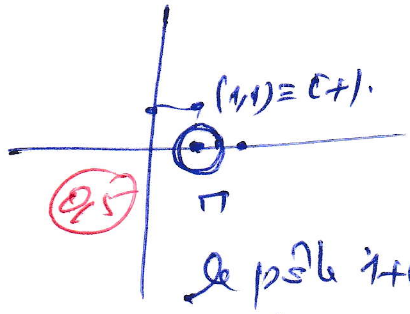
$1+i \equiv (1,1)$ à l'intérieur de Γ

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i\, f(a).$$ 0,5

calculons $f(1+i) = (1+i)^2 + (i+1) + 1 = 1 + 2i - 1 + i + 1 + 1$
$= 2 + 3i$ 0,5

$$\boxed{\oint_\Gamma \frac{z^2+z+1}{z-i-1}\,dz = 2\pi i(2+3i) = 4\pi i - 6\pi}$$ 0,5

③ C'est le même intégrale que ② mais le lacet est cercle du centre $(1,0)$ et rayon $\frac{1}{2}$



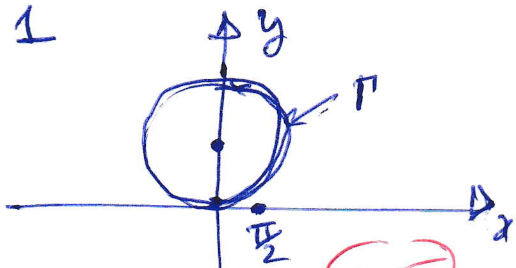
0,5

le pôle $1+i$ à l'exterieure du lacet Γ

Comme la fonction $g(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z-i-1}$ est holomorphe à l'interieur du lacet Γ

donc $$\int_\Gamma \frac{z^2+z+1}{z-i-1}\,dz = 0$$ 0,5

④ $$\oint_\Gamma \frac{z+\cos(z)}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz$$, Γ lacet ≡ cercle du centre $(0,1)$ et du rayon 1



0,5

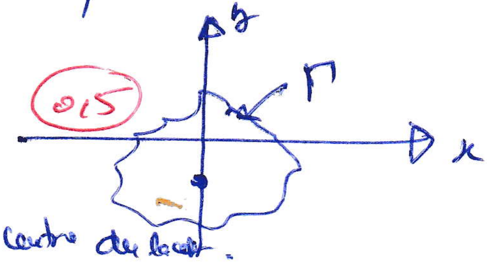
le pôle $z=\frac{\pi}{2}$ est à l'exterieure du lacet.

Comme la fonction $g(z) = \dfrac{z+\cos(z)}{z-\frac{\pi}{2}}$ est holomorphe à l'intérieure du lacet $\Rightarrow$ $$\oint_\Gamma \frac{z+\cos(z)}{z-\frac{\pi}{2}} = 0$$ 0,5

⑤ $$\oint_\Gamma \frac{z^4+z^3+1}{(z+i)^3}\,dz$$, Γ lacet quelconque du centre $(0,-1)$.

0,5

le pôle $z=-i$ $=(0,-1)$ est le centre du lacet.



⑦

posons $f(z) = z^4 + z^3 + 1$ et $z = -i = a$.

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{(3-1)!} \left[\frac{d^2 f}{dz^2}\right]_{z=a}$$ 0,5

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = 4z^3 + 3z^2 \ ; \ f''(z) = \frac{d^2 f}{dz^2} = 12z^2 + 6z.$$

$$f''(z=a) = f''(z=-i) = 12(-i)^2 + 6(-i) = -12 - 6i$$ 0,5

$$\oint_\Gamma \frac{z^4 + z^3 + 1}{(z+i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}(-12 - 6i) = \pi i(-12 - 6i)$$

$$= -12\pi i + 6\pi$$

$$\boxed{\oint_\Gamma \frac{z^4 + z^3 + 1}{(z+i)^3} dz = 6\pi - 12\pi i}$$ 0,5