

# Chapitre 3

## Réseaux électriques en régime sinusoïdal

Si l'on impose à un réseau une tension (ou un courant) sinusoïdale, on voit apparaître, en plus du régime transitoire, une réponse sinusoïdale de même fréquence que la tension (ou le courant) appliquée. Quand le régime transitoire a disparu, cette réponse sinusoïdale subsiste : c'est le régime sinusoïdal permanent. Dans cette partie, nous étudions des circuits linéaires dans lesquels les signaux imposés par les générateurs sont sinusoïdaux.

### 1. Grandeurs sinusoïdales

Un signal est dit sinusoïdal s'il est de la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = X\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$x_m$  : amplitude du signal.

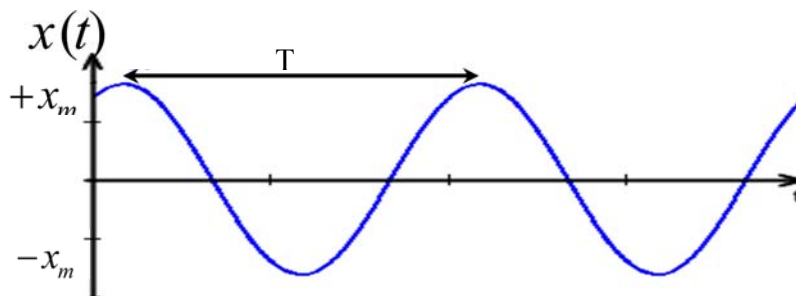
$\omega$  : pulsation du signal périodique et s'exprime en (rad/s).

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  : période du signal ;  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  : fréquence du signal.

$\omega t + \varphi$  : est la phase du signal et s'exprime en radians (rad),

$\varphi$  : phase initiale du signal (à  $t = 0$ ).

$X$  : valeur efficace définie par :  $X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$  ; on obtient :  $X = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$ .



## 2. Représentations des grandeurs sinusoïdales

### 2.1. Représentation vectorielle (Méthode de Fresnel)

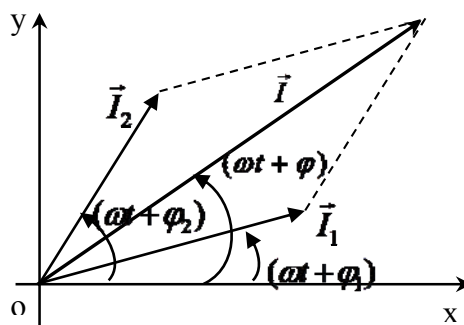
Cette méthode permet d'additionner des grandeurs instantanées sinusoïdales de même fréquence, mais d'amplitudes et de phases différentes.

- Considérons deux courants sinusoïdaux :

$$i_1(t) = I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La somme des deux courant est :  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ .

- Pour trouver  $i(t)$ , on peut procéder graphiquement :



- On considère un vecteur noté  $\vec{I}_1$ , de norme  $I_{m1}$ , tournant dans le plan  $\mathbf{xOy}$  à une vitesse angulaire  $\omega$ , et dont l'angle avec l'axe  $\mathbf{Ox}$  à un instant  $t$  est égale à  $\omega t + \varphi_1$ . On définit de même un vecteur  $\vec{I}_2$ .
- Les projections sur  $Ox$  des vecteurs  $\vec{I}_1$  et  $\vec{I}_2$  sont égales respectivement aux courants  $i_1$  et  $i_2$ .

La somme des deux courants  $i(t)$  est la projection du vecteur somme :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 ; \quad \text{tel que} \quad \|\vec{I}\| = I_m$$

### 2.2. Représentation complexe

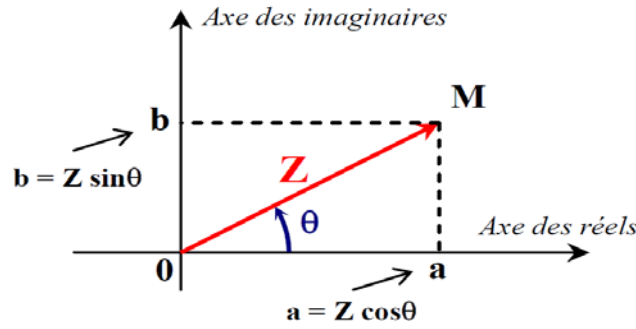
#### 2.2.1. Rappels mathématiques

- Un nombre complexe peut se mettre sous la forme :  $Z = a + jb$

On appelle :  $a = \Re(Z)$  la partie réelle

et  $b = \Im(Z)$  la partie imaginaire

- On peut lui associer un vecteur  $\vec{OM}$  dans le plan complexe :  $Z = r \cos \theta + j r \sin \theta$



$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  : module du nombre complexe

$\theta = \arg(Z) = \arctan \frac{b}{a}$  : argument (angle) du nombre complexe

- On peut aussi l'écrire sous la forme exponentielle :  $Z = r e^{j\theta}$
- ou sous la forme polaire :  $Z = [r ; \theta] = r \angle \theta$
- cas particulier :  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

**2.2.2. Application aux signaux sinusoïdaux**

On associe à un signal sinusoïdal  $x(t)$  une grandeur complexe temporelle  $\underline{X}$  :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = \Re(\underline{X} e^{j\omega t}) ; \quad \underline{X} = x_m e^{j\varphi} = X \sqrt{2} e^{j\varphi} = X \angle \varphi$$

$$x(t) \Leftrightarrow \underline{X}$$

$x_m$  : module de la grandeur complexe ( $|\underline{X}|$ ) ;

$\varphi$  : argument de la grandeur complexe ( $\arg \underline{X}$ ) ;

$X = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$  : valeur efficace.

**Remarque :** On notera  $x(t)$  la valeur instantanée,  $X$  la valeur efficace et  $\underline{X}$  la valeur complexe.

**2.2.3. Dérivée et intégration**

Soit la fonction  $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ , la dérivée s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = x_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On lui associe l'amplitude complexe :  $\omega x_m e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega x_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{X} e^{j\omega t}$

donc :  $\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{X}$

De même on démontre que intégrer revient à diviser par  $j\omega$  :  $\int x dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{X}$

### 3. Modèle complexe d'un circuit en régime sinusoïdal

Dans un circuit en régime sinusoïdal, on peut écrire :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = \Re(\underline{E} e^{j\omega t}) ; \underline{E} = E_0$$

la source de tension  $e(t)$  est remplacée par sa forme complexe notée  $\underline{E}$  :

$$e(t) \Leftrightarrow \underline{E} = E_0$$

Dans le modèle complexe, tout dipôle linéaire possède une **impédance complexe** :  $\underline{Z} = R + jX$

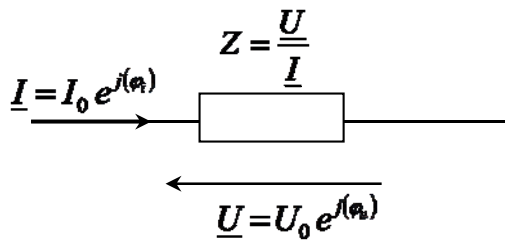
où  $R$  : représente la résistance du dipôle

$X$  : la réactance

#### 3.1. Impédances complexes des dipôles élémentaires

L'impédance complexe  $Z$  est défini pour un dipôle linéaire comme étant égale au rapport de la valeur

complexe de la tension  $\underline{U}$  sur la valeur complexe du courant  $\underline{I}$  :  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$



##### 3.1.1. Impédance d'une résistance

nous avons :  $u(t) = R i(t)$

En passant aux amplitudes complexes, nous obtenons alors :  $\underline{U} = R \underline{I}$

Dans le cas d'une résistance, l'impédance complexe est égale à  $R$  :  $\underline{Z}_R = R$

##### 3.1.2. Impédance d'une bobine idéale

La relation entre courant et tension aux bornes d'une bobine d'inductance  $L$  est :  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Cette relation temporelle se traduit en termes d'amplitudes complexes par :  $\underline{U} = jL\omega \underline{I}$

La définition de l'impédance complexe d'un dipôle linéaire nous permet alors de poser :  $\underline{Z}_L = jL\omega$

##### 3.1.3. Impédance d'un condensateur

La relation entre courant et tension aux bornes d'un condensateur idéal de capacité  $C$  est :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt . \text{ Nous déduisons : } \underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} .$$

L'expression de l'impédance du condensateur s'écrit :  $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

**3.2. Lois en régime sinusoïdal**

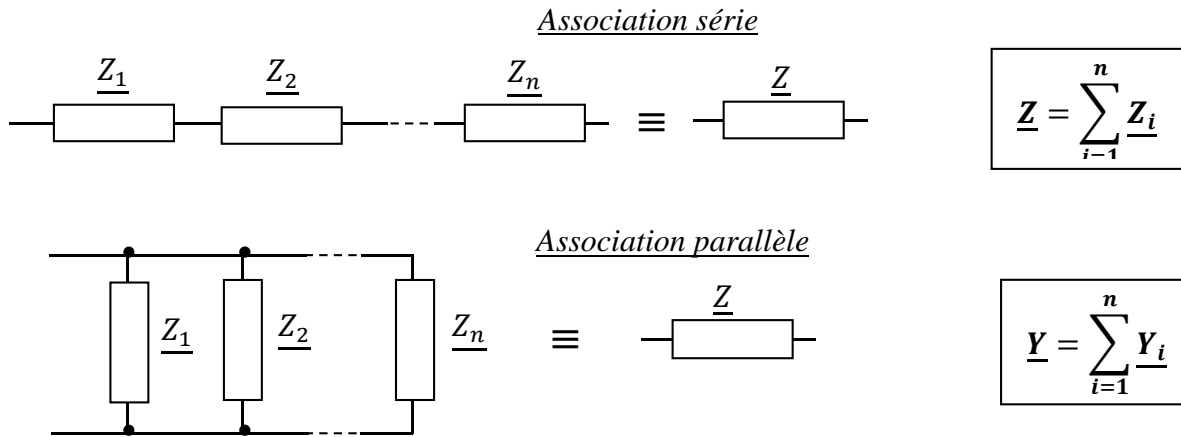
Toutes les lois vues en régime continu sont applicables aux régimes sinusoïdaux à condition de les appliquer aux valeurs instantanées ou aux valeurs complexes.

	Résistance R	Inductance L	Capacité C
<b>Schéma</b>			
<b>Equation fondamentale</b>	$u_R(t) = R i(t)$	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
<b>Equation complexe</b>	$\underline{U}_R = R \underline{I}$	$\underline{U}_L = jL\omega \underline{I}$	$\underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$
<b>Impédance Z (Ω)</b>	$Z_R = R$	$Z_L = jL\omega$	$Z_C = \frac{-j}{C\omega}$
<b>Admittance Y (S)</b>	$Y_R = \frac{1}{R}$	$Y_L = -\frac{j}{L\omega}$	$Y_C = jC\omega$
<b>Déphasage</b> $\varphi(\text{rad}) = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$
<b>Représentation de Fresnel</b>			
	Le courant est en phase avec la tension	Le courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension	Le courant est en avance de $\pi/2$ sur la tension
<b>Relations de phase</b>			

**3.3. Groupement de dipôles passifs**

Soit un groupement de dipôles passifs, d'impédance complexe  $\underline{Z}_i$  et d'admittance complexe  $\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$

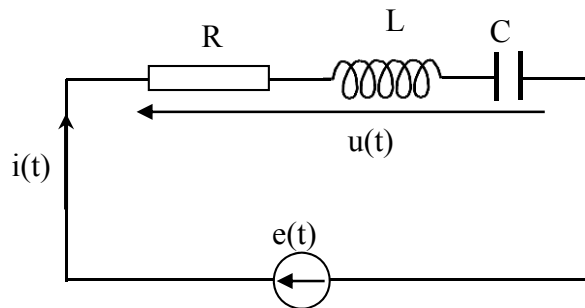
l'impédance équivalente est :



Ce qui était vrai pour l'association des résistances reste applicable à l'association des impédances.

**3.4. Etude d'un circuit RLC série**

On associe en série un générateur sinusoïdal délivrant une tension  $e(t)$ , un conducteur ohmique de résistance  $R$ , une bobine parfaite d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$ .



Avec  $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$

$u_R = Ri$  ;  $u_L = L \frac{di}{dt}$  ;  $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$

Loi des mailles :  $u(t) = u_R + u_L + u_C = e(t)$

on obtient l'équation :  $e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$

On remplace  $i(t)$  et  $e(t)$  par leur notation complexe :

$$\underline{E} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \frac{\underline{I}}{jC\omega} = \left( R + j\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \underline{I} \quad \text{donc on a : } \underline{E} = \underline{Z} \underline{I}$$

On retrouve l'impédance :  $\underline{Z} = R + j\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$  et son module :  $Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$

Et l'argument :  $\varphi = \arctan \frac{\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}$

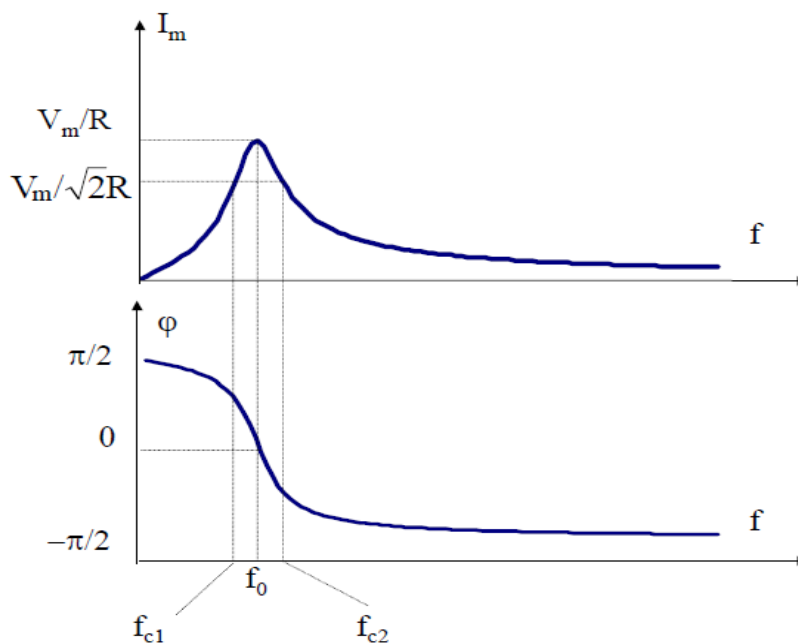
**Résonance en intensité**

Dans un circuit RLC série lorsque le générateur impose une pulsation  $\omega = \omega_0$  (la pulsation propre) le circuit entre en résonance d'intensité, l'intensité du courant est alors maximale :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{R + j\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

$\underline{I}$  est maximal, lorsque le dénominateur est minimal :  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ . Donc on aura :

- Pulsation propre  $\omega_0$  :  $LC\omega_0^2 = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Fréquence propre  $f_0$  :  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- L'impédance du circuit est minimale et réelle :  $Z = R$
- Le déphasage est nul :  $\varphi = 0$



- Bande passante :  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  ;  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

La largeur de cette bande passante vaut : 
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

- on exprime l'acuité à la résonance à l'aide du facteur de qualité du circuit Q :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aigue.

### 3.5. Puissance

#### 3.5.1. Puissance instantanée

Soit :  $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$  la tension aux bornes d'un dipôle ;

$i(t) = I\sqrt{2} \cos\omega t$  l'intensité du courant qui la traverse.

La puissance reçue par ce dipôle est définie par :  $p(t) = u(t) \times i(t)$

$$p(t) = 2U I \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

On note que la puissance est une fonction périodique de période T/2 par rapport à  $u(t)$  et  $i(t)$ .

#### 3.5.2. Puissance moyenne

La puissance moyenne P est définie par : 
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi$$

La puissance est aussi appelée puissance active en régime sinusoïdal.

La bobine parfaite  $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$  et le condensateur  $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$  ne consomment pas de puissance active donc pas d'énergie.



### Exercices du chapitre 3

#### Exercice 1

Soit une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U=15\text{ V}$  et de période  $T=1\text{ ms}$ .

- 1- Calculer sa valeur maximale, sa fréquence et sa pulsation.
- 2- Exprimer la tension instantanée en fonction du temps. Cette tension vaut  $10\text{ V}$  à l'instant initial.
- 3- Déterminer l'amplitude complexe de cette tension.

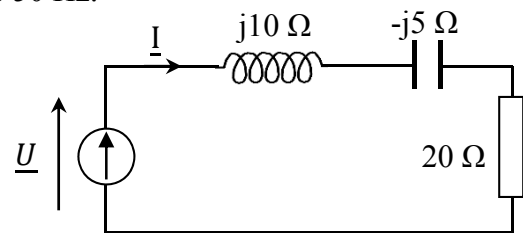
#### Exercice 2

Déterminer par la méthode complexe, la somme des trois tensions définies par leurs valeurs effectives et leurs phases initiales :  $U_1 (55\text{ V}, 90^\circ)$ ;  $U_2 (75\text{ V}, 45^\circ)$ ;  $U_3 (100\text{ V}, 0^\circ)$ .

#### Exercice 3

On considère le circuit représenté ci-dessous où  $\underline{U}$  est la représentation complexe d'une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U_{\text{eff}} = 100\text{V}$  et de fréquence  $50\text{ Hz}$ .

Les composants de ce circuit sont directement caractérisés par la valeur de leur impédance complexe.



1. Calculer la valeur maximal  $I_m$  du courant  $\underline{I}$ ;
2. Calculer la phase du courant  $\underline{I}$  si on considère la tension  $\underline{U}$  à l'origine des phases. Ecrire alors l'expression temporelle du courant  $i(t)$  et de la tension  $u(t)$ .

#### Exercice 4

Un **dipôle 1** est constitué par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance  $R_1=100\Omega$  et d'une bobine parfaite d'inductance  $L=0.5\text{H}$ . Le **dipôle 2** est constitué par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance  $R_2=150\Omega$  et d'un condensateur de capacité  $C=15\mu\text{F}$ .

- I- On branche ces deux dipôles en série sous une tension effective de  $24\text{V}$  et de fréquence  $50\text{Hz}$ 
  - 1- Exprimer l'impédance de chaque dipôle sous la forme  $\underline{z} = a + jb$ .
  - 2- Exprimer l'impédance  $\underline{Z}$  de l'association série des deux dipôles
  - 3- Déterminer la valeur  $i(t)$  puis la tension aux bornes de chaque dipôle
- II- On branche ces deux dipôles en parallèle sous une tension effective de  $24\text{V}$  et de fréquence  $50\text{Hz}$ 
  - 1- Exprimer l'impédance  $\underline{Z}$  de l'association parallèle
  - 2- Déterminer la valeur de l'intensité du courant traversant chaque dipôle ainsi que l'intensité du courant total.